Chapitre 1 Calcul vectoriel dans le plan

1.1 Vecteurs du plan

1.1.1 Éléments d'un vecteur

Soient A et B deux points du plan. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est caractérisé par :

- ✿ **la direction** : celle de la droite (AB),
- ✿ **le sens** : de A vers B,
- ✿ **la norme** (ou **la langueur**) : c'est la distance AB, et on écrit : $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = AB$

Un vecteur est généralement noté par $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$,...

☞ **Remarque**

Le vecteur $\overrightarrow{AA}$ n'a ni de direction ni de sens, et sa norme est nulle, s'appelle **le vecteur nul** et on écrit : $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$

1.1.2 Égalité de deux vecteurs

Definition 1.1

On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont égaux s'ils ont la même direction, le même sens et la même norme.

Propriété 1.1

Si $\vec{u}$ est un vecteur et A est un point du plan, alors il existe un unique point M tel que : $\overrightarrow{AM} = \vec{u}$

Propriété 1.2

Soit $ABCD$ un quadrilatère.
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ si et seulement si $ABCD$ est un parallélogramme.

1.1.3 Somme de deux vecteurs

(a) Relation de Chasles

Soient A et B deux points du plan.
Pour tout point C du plan, on a : $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$

Exemple 1.1

Soient A, B, C et E des points du plan. Alors, on a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CA} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CA} \\ &= \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EA} \\ &= \overrightarrow{AA}\end{aligned}$$

$= \overrightarrow{0}$

(b) Règle du parallélogramme

Soient A, B et C des points non alignés.

La somme des deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ est le vecteur $\overrightarrow{AD}$ tel que $ABCD$ est un parallélogramme.

(c) Opposé d'un vecteur

Definition 1.2

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul.

L'opposé du vecteur $\overrightarrow{u}$ est le vecteur qui a la même direction, la même norme et qui a un sens contraire à celui de $\overrightarrow{u}$. On le note $-\overrightarrow{u}$.

☞ **Remarque**

Soient A et B deux points du plan.

L'opposé du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur $\overrightarrow{BA}$ et on écrit : $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$

Application 1.1

1. Soient A, B et C trois points non alignés.
   Construire les points D, E et F tels que :

   (a) $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ (b) $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ (c) $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}$

2. On considère le vecteur : $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB}$
   Simplifier le vecteur $\overrightarrow{u}$.
3. Soient ABC un triangle et E le milieu du segment $[BC]$.
   On considère le point M tel que : $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CE}$
   Montrer que $ACEM$ et $AEBM$ sont des parallélogrammes.

1.2 Multiplication d'un vecteur par un nombre réel

1.2.1 Définition et propriétés

Definition 1.3

Soient $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul et k un nombre réel non nul.

La multiplication du vecteur $\overrightarrow{u}$ par le nombre réel k est le vecteur noté $k.\overrightarrow{u}$ ou $k\overrightarrow{u}$ définie par :

- **la direction** : la même que celle de $\overrightarrow{u}$,
- **le sens** : le même que $\overrightarrow{u}$ si $k > 0$, et opposé à $\overrightarrow{u}$ si $k < 0$,
- **la norme** : $\|k\overrightarrow{u}\| = k \times \|\overrightarrow{u}\|$ si $k > 0$ et $\|k\overrightarrow{u}\| = -k \times \|\overrightarrow{u}\|$ si $k < 0$.

Propriété 1.3

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs et k et k' deux nombres réels.

(a) $(k+k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$

(b) $k\left(\vec{u}+\vec{v}\right) = k\vec{u} + k\vec{v}$

(c) $k\vec{0} = \vec{0}$

(d) $k\left(k'\vec{u}\right) = (kk')\vec{u}$

(e) $1\vec{u} = \vec{u}$

(f) $0\vec{u} = \vec{0}$

☞ Remarque

Si $\vec{u}$ est un vecteur et k est un nombre réel, alors $k\vec{u} = \vec{0}$ si et seulement si $k = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$.

Exemple 1.2

1. $5\overrightarrow{AB} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} = \left(5 - \frac{3}{2}\right)\overrightarrow{AB} = \frac{7}{2}\overrightarrow{AB}$.
2. $2 \times \left(\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}\right) = \left(2 \times \frac{3}{2}\right)\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AB}$.
3. $2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} = 2\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) = 2\overrightarrow{AC}$.
4. $3\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ est équivalent à $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$, c'est-à-dire $A = B$.

1.2.2 Colinéarité de deux vecteurs - alignement de trois points

Definition 1.4

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.
On dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** s'il existe un nombre réel non nul k tel que : $\vec{v} = k\vec{u}$

☞ Remarque

Le vecteur nul est colinéaire avec tous les vecteurs.

Propriété 1.4

Soient A, B, C et D quatre points tels que $A \neq B$ et $C \neq D$.
$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires si et seulement si (AB) et (CD) sont parallèles.

Application 1.2

Soient ABC un triangle et E et F deux points tels que : $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$

1. Construire une figure.
2. Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{BF}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
3. En déduire que $(EC)//(BF)$.

1.3 Milieu d'un segment

Definition 1.5

Soient $[AB]$ un segment et I un point. On dit que I est **le milieu** de $[AB]$ si : $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$

Propriété 1.5

Soient $[AB]$ un segment et I un point.

I est le milieu de $[AB]$ est équivalent à : $\begin{cases} \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB} \\ \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI} \end{cases}$

Résultat :

Si I est le milieu du segment $[AB]$, alors pour tout point M du plan, on a : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$

Démonstration :

Soient $[AB]$ un segment et I son milieu. Pour tout point M du plan, on a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} &= \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right) + \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right) && \text{(d'après la relation de Chasles)} \\ &= 2\overrightarrow{MI} + \left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}\right) \\ &= 2\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{0} && \left(\text{car } \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{0}\right) \\ &= 2\overrightarrow{MI} \end{aligned}$$

D'où pour tout point M du plan, on a : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$

Application 1.3

Soient ABC un triangle et E et F deux points tels que : $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

1. Construire une figure.
2. Établir que le point B est le milieu du segment $[EF]$.