Calcul vectoriel dans le plan

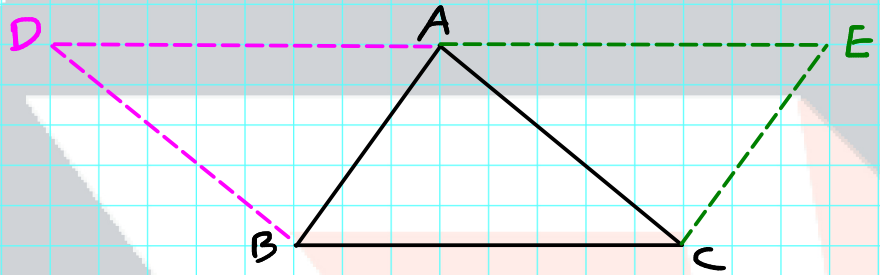
(Solution de la série)

Réalisé par P.r A. OUDIKA

Exercice n°1

1-(a) construction du point D.

On a: $\vec{AD} = \vec{AB} - \vec{AC} = \vec{CA} + \vec{AB} = \vec{CB}$



(b) Déduisons la nature du quadrilatère ADBC.

D'après la question 1-(a), on a: $\vec{AD} = \vec{CB}$

D'où ADCB est un parallélogramme.

2-(a) construction du point E.

On a: $\vec{CE} = \vec{CA} + \vec{BC} = \vec{BC} + \vec{CA} = \vec{BA}$

(Voir la figure précédente).

(b) Que peut-on déduire ?

D'après la question 2-(a), on a: $\vec{CE} = \vec{BA}$

D'où CEAB est un parallélogramme.

Exercice n°2

1) Exprimons le vecteur $\vec{AM}$ en fonction de $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$.

On a: $2\vec{MA} + 3\vec{MB} - \vec{MC} = \vec{0}$

c.à.d: $2\vec{MA} + 3(\vec{MA} + \vec{AB}) - (\vec{MA} + \vec{AC}) = \vec{0}$

c.à.d: $2\vec{MA} + 3\vec{MA} + 3\vec{AB} - \vec{MA} - \vec{AC} = \vec{0}$

c.à.d: $4\vec{MA} = -3\vec{AB} + \vec{AC}$

c.à.d: $-4\overrightarrow{AM} = -3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

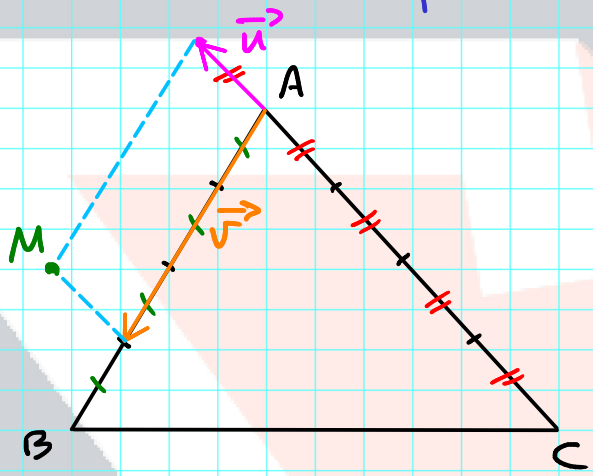
D'où: $\boxed{\overrightarrow{AM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}}$

c) construction du point M.

On pose $\vec{u} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.

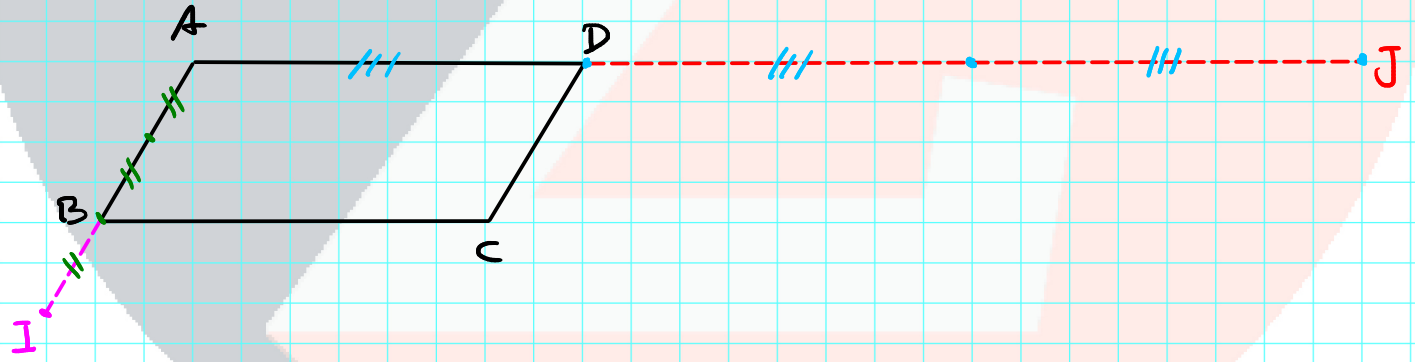
on a donc: $\overrightarrow{AM} = \vec{u} + \vec{v}$

construisons les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, puis le point M.



Exercice n°3

1) construction d'une figure.



c) * Montrons que: $\overrightarrow{CJ} = -\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}$

on a: $\overrightarrow{CJ} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DJ}$ (D'après la relation de chasles)

$= \overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{AD}$ (car $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{DJ} = 2\overrightarrow{AD}$)

$= -\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}$

D'où: $\boxed{\overrightarrow{CJ} = -\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}}$

* Montrons que : $\overrightarrow{CI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$

On a : $\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BI}$ (D'après la relation de Chasles)

$= \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AI}$ (car $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA}$)

$= -\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ (car $\overrightarrow{AI} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$)

$= \left(-1 + \frac{3}{2}\right)\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$

D'où : $\boxed{\overrightarrow{CI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}}$

3) Déduisons que les vecteurs $\overrightarrow{CI}$ et $\overrightarrow{CJ}$ sont colinéaires.

D'après la question 2), on a :

$\overrightarrow{CJ} = -\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}$

$= (-2) \times \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + (-2) \times (-\overrightarrow{AD})$

$= -2\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}\right)$

$= -2\overrightarrow{CI}$ (car $\overrightarrow{CI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$)

Donc $\overrightarrow{CJ} = -2\overrightarrow{CI}$ et par suite $\overrightarrow{CJ}$ et $\overrightarrow{CI}$ sont colinéaires.

Exercice n°4

1) * Établissons que $\overrightarrow{BE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{AB}$

A B
D C

On a : $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DE}$ (D'après la relation de Chasels)

$= \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE}$

$= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BA} + \frac{5}{2}\overrightarrow{DA}$ (car $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{DE} = \frac{5}{2}\overrightarrow{DA}$)

$= -\overrightarrow{DA} + \frac{5}{2}\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{AB}$

$= \left(-1 + \frac{5}{2}\right)\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{AB}$

$= \frac{3}{2}\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{AB}$

D'où : $\boxed{\overrightarrow{BE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{AB}}$

* Établissons que : $\overrightarrow{BF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC}$

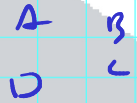
On a : $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DF}$ (D'après la relation de chasles)

$= \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DF}$

$= \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{DC} + \frac{5}{3}\overrightarrow{DC}$ (car $\overrightarrow{DF} = \frac{5}{3}\overrightarrow{DC}$)

$= \left(-1 + \frac{5}{3}\right)\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC}$

$= \frac{2}{3}\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC}$



D'où : $\boxed{\overrightarrow{BF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC}}$

2-(a) * Exprimons $\overrightarrow{BE}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$.

D'après la question 1), on a :

$\overrightarrow{BE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{AB}$

$= \frac{3}{2}\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AB}$ (car $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$)

$= -\overrightarrow{AB} - \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$

D'où : $\boxed{\overrightarrow{BE} = -\overrightarrow{AB} - \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}}$

* Exprimons $\overrightarrow{BF}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$.

D'après la question 1), on a :

$\overrightarrow{BF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC}$

$= \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ (car $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$)

D'où : $\boxed{\overrightarrow{BF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}}$

(b) Montrons que $2\overrightarrow{BE} = 3\overrightarrow{FB}$.

D'après la question 2-(a), on a :

$2\overrightarrow{BE} = 2\left(-\overrightarrow{AB} - \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}\right)$

$= -2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{BC}$

$= -3\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right)$

$= -3\overrightarrow{BF}$ (car $\overrightarrow{BF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$)

$= 3\overrightarrow{FB}$

D'où: $\boxed{2\overrightarrow{BE} = 3\overrightarrow{FB}}$

(c) Que peut-on dire des points B, E et F ?

D'après la question 2-(b), on a: $2\overrightarrow{BE} = 3\overrightarrow{FB}$

c'est-à-dire $\overrightarrow{BE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{EB}$.

D'où les points B, E et F sont alignés.

Exercice n°5

1) Construction de la figure.

On a: $2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{0}$

est équivalent à: $2(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BA}) + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{0}$

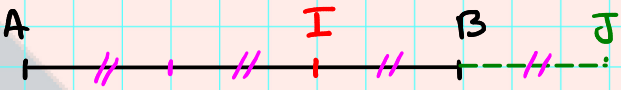
est équivalent à: $3\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$

est équivalent à: $\boxed{\overrightarrow{IB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}}$

De même, on a: $3\overrightarrow{JB} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$

est équivalent à: $\boxed{\overrightarrow{JB} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}}$

D'où la construction de la figure:



2) Montrons le point B est le milieu du segment [IJ].

D'après la question 1), on a: $\overrightarrow{IB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{JB} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

Alors: $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{JB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$

D'où B est le milieu de [IJ].

Exercice n°6

1) * Établissons que $\overrightarrow{BB'} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

On a: $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB'}$ (D'après la relation de chasles)

$= -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ (car B' est le milieu de [AC])

D'où: $\boxed{\overrightarrow{BB'} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}}$

* Établissons que $\overrightarrow{CC'} = -\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

On a: $\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC'}$ (D'après la relation de chasles)

$= -\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ (car C' est le milieu de [AB])

D'où: $\boxed{\overrightarrow{CC'} = -\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}}$

2-(a) La nature des quadrilatères ABCE et ACBF.

On a: $\overrightarrow{BE} = 2\overrightarrow{BB'}$

$= 2\left(-\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)$ (D'après la question 1))

$= 2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$

$= 2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ (D'après la relation de chasles)

$= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$

D'où ABCE est un parallélogramme.

De même, on a:

$\overrightarrow{CF} = 2\overrightarrow{CC'}$ (D'après la question 1))

$= 2\left(-\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)$

$= 2\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}$

$= 2\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$ (D'après la relation de chasles)

$= \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$

D'où ACBF est un parallélogramme.

(b) Montrons que les points A, E et F sont alignés.

On a: $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}$ (D'après la relation de chasles)

$= \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BB'}$ (car $\overrightarrow{BE} = 2\overrightarrow{BB'}$)

$= \overrightarrow{AB} + 2\left(-\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)$ (car $\overrightarrow{BB'} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$)

$= \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

$= -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ (*)

et: $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CF}$ (D'après la relation de chasles)

$= \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{CC'}$ (car $\overrightarrow{CF} = 2\overrightarrow{CC'}$)

$= \overrightarrow{AC} + 2\left(-\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)$ (car $\overrightarrow{CC'} = -\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$)

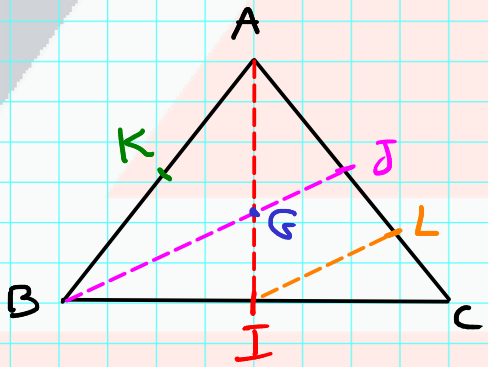
$= \overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}$

$= -\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}$ (**)

De (*) et (**) on en déduit que: $\overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{AF}$

D'où les points A, E et F sont alignés.

Exercice n°7



1) * Montrons que $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$.

Dans le triangle BJC, on a (IL) // (BJ), car L est le milieu de [JC] et I est le milieu de [BC].

On considère maintenant le triangle AIL.

On a (IL) // (GJ) et (IA) et (LA) se coupent en A.

Donc d'après le théorème de Thalès directe, on a:

$$\frac{AG}{AI} = \frac{AJ}{AL}$$

D'autre part, on a $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, car J est le milieu de [AC] et $\overrightarrow{JL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{JC}$, car L est le milieu de [JC] et $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{JC}$.

Donc: $\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{JL}$ (d'après la relation de chasles)

$= \overrightarrow{AJ} + \frac{1}{2}\overrightarrow{JC}$ (car $\overrightarrow{JL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{JC}$)

$= \overrightarrow{AJ} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AJ}$ (car $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{JC}$)

$= \frac{3}{2}\overrightarrow{AJ}$

D'où $AL = \frac{3}{2}AJ$, c'est-à-dire $\frac{AJ}{AL} = \frac{2}{3}$ et par suite $AG = \frac{2}{3}AI$ et puisque les points A, G et I sont alignés et $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AG}$ ont le même sens, alors: $\boxed{\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}}$

* Déterminons $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

On a I est le milieu de [BC], alors: $2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

Donc: $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$

Par suite: $\boxed{\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})}$

2-(a) Déterminons $\overrightarrow{BG}$ en fonction de $\overrightarrow{BJ}$ et $\overrightarrow{CG}$ en fonction de $\overrightarrow{CK}$.

De même que la question 1), on considère L' et L'', les milieux respectifs de [IC] et [AJ] et on montre que:

$\boxed{\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BJ}}$ et $\boxed{\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CK}}$

(b) que peut-on déduire ?

D'après la question 2-(a), on a: $\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CK}$

Donc les points C, G et K sont alignés, c'est-à-dire le point G appartient à la médiane (CK) et par suite toutes les médianes du triangle ABC se coupent au point G.
Le point G est le centre de gravité du triangle ABC.
De même, on montre que:

$$\overrightarrow{BG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})$$

3) Montrons que $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

D'après la question précédente, on a:

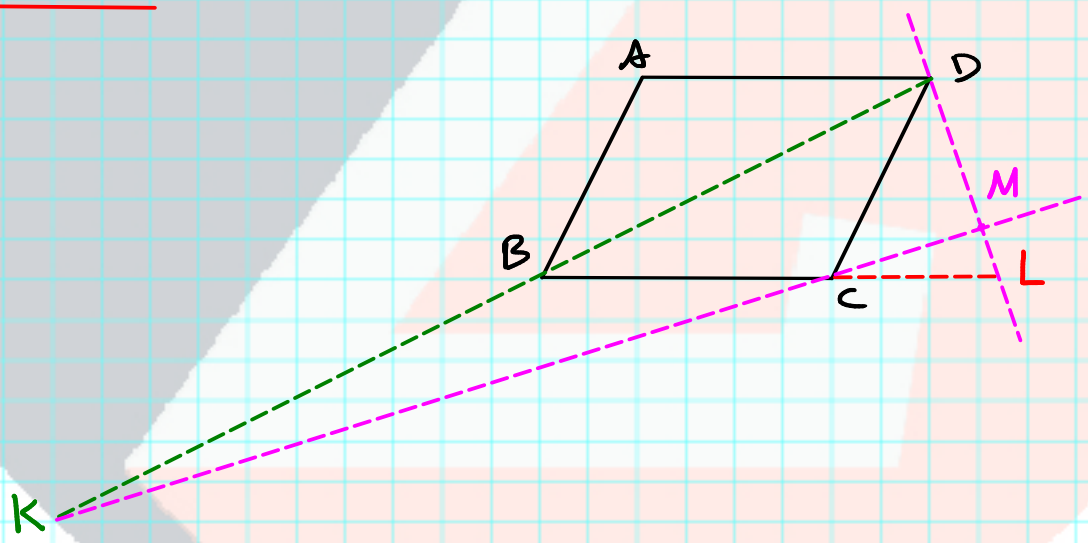
$$\overrightarrow{GA} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}),\ \overrightarrow{GB} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}) \text{ et } \overrightarrow{GC} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC})$$

Alors: $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC})$

$= \vec{0}$

D'où: $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC} = \vec{0}$

Exercice n°8



Montrons que: $\overrightarrow{DM} = \frac{a+\ell}{a^2+\ell a+\ell}\overrightarrow{DL}$

Ona $M \in (DL)$, donc il existe un nombre réel k tel que: $\overrightarrow{DM} = k\overrightarrow{DL}$

De même, $M \in (CK)$, donc il existe un nombre réel t tel que:

$$\overrightarrow{CM} = t\overrightarrow{CK}$$

D'après la relation de chasles, on a:

$$\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{DC} + t\overrightarrow{CK}$$

Exprimons les vecteurs $\overrightarrow{DL}$ et $\overrightarrow{CK}$ en fonction de $\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{DC}$.

* pour $\overrightarrow{DL}$:

On a: $\overrightarrow{DL} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CL}$ (D'après la relation de chasles)

$= a\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC}$ (car $\overrightarrow{CL} = a\overrightarrow{BC}$)

$= -a\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}$ (car $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{DA}$)

D'où: $\boxed{\overrightarrow{DL} = -a\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}}$

* pour $\overrightarrow{CK}$:

On a: $\overrightarrow{CK} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DK}$ (D'après la relation de chasles)

$= (a+2)\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC}$

$= (a+2)(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}) - \overrightarrow{DC}$ (car ABCD est un parallélogramme)

$= (a+2)\overrightarrow{DA} + (a+2)\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DC}$

$= (a+2)\overrightarrow{DA} + (a+1)\overrightarrow{DC}$

D'où: $\boxed{\overrightarrow{CK} = (a+2)\overrightarrow{DA} + (a+1)\overrightarrow{DC}}$

Nous avons maintenant deux expressions pour le même vecteur $\overrightarrow{DM}$:

D'une part: $\overrightarrow{DM} = k\overrightarrow{DL} = -ka\overrightarrow{DA} + k\overrightarrow{DC}$

D'autre part: $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DC} + t\overrightarrow{CK}$

$= \overrightarrow{DC} + t(a+2)\overrightarrow{DA} + t(a+1)\overrightarrow{DC}$

$= t(a+2)\overrightarrow{DA} + (1 + t(a+1))\overrightarrow{DC}$

en identifiant les coefficients devant $\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{DC}$:

$$\begin{cases} -ka = t(a+2) \\ k = 1 + t(a+1) \end{cases}$$

Résolvons ce système pour trouver k.

De la première équation, on isole t : $t = \dfrac{-ka}{a+2}$

on substitue cette expression de t dans la deuxième équation :

$$k = 1 + \frac{-ka}{a+2}(a+1)$$

on multiple toute l'équation par $(a+2)$:

$$k(a+2) = (a+2) - ka(a+1)$$

Développons et rassemblons tous les termes contenant k d'un même côté : $k(a^2+2a+2) = a+2$

D'où : $k = \dfrac{a+2}{a^2+2a+2}$

Par suite : $\boxed{\overrightarrow{DM} = \dfrac{a+2}{a^2+2a+2}\overrightarrow{DL}}$