Chapitre Développement, factorisation et identités remarquables

2.1 Développement

Définition 2.1

Développer, c'est transformer un produit en une somme ou en une différence.

♣

Proposition 2.1

Soient a, b, c, d et k des nombres réels. Alors, on a :

- $k(a+b) = k \times a + k \times b$,
- $k(a-b) = k \times a - k \times b$,
- $(a+b)(c+d) = a \times c + a \times d + b \times c + b \times d$.

♠

Exemple 2.1

1. Développons et réduisons l'expression : $A = \sqrt{3}\left(\sqrt{3}+1\right)$.

   On a :

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{3}\left(\sqrt{3}+1\right) \\ &= \sqrt{3} \times \sqrt{3} + \sqrt{3} \times 1 \\ &= \left(\sqrt{3}\right)^2 + \sqrt{3} \\ &= 3 + \sqrt{3}. \end{aligned}$$

   D'où : $\boxed{A = 3 + \sqrt{3}}$

2. Développons et réduisons l'expression : $B = (2x-1)(x+5)$.

   On a :

$$\begin{aligned} B &= (2x-1)(x+5) \\ &= 2x \times x + 2x \times 5 - 1 \times x - 1 \times 5 \\ &= 2x^2 + 10x - x - 5 \\ &= 2x^2 + 9x - 5. \end{aligned}$$

   D'où : $\boxed{B = 2x^2 + 9x - 5}$

3. Développons et réduisons l'expression : $A = -3(2x+1) + (x-1)(x+2)$.

On a :

$$\begin{aligned} A &= -3(2x+1)+(x-1)(x+2) \\ &= -3\times 2x+(-3)\times 1+x\times x+x\times 2-1\times x-1\times 2 \\ &= -6x-3+x^2+2x-x-2 \\ &= x^2-5x-5. \end{aligned}$$

D'où : $\boxed{C = x^2-5x-5}$

✍ **Exercice 2.1** Développer et réduire les expressions suivantes :

$A = 2(x+2)$ $\qquad$ $B = -3x(2x-5)$

$C = \left(3\sqrt{2}+4\right)\left(2\sqrt{5}-1\right)$ $\qquad$ $D = 7x(2x-5)-x(2x-3)$

$E = (3x-1)(2-x)-(5x-2)(3-x)$ $\qquad$ $F = 2\sqrt{3}\left(4-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}+4\sqrt{3}\right)$

2.2 Factorisation

Définition 2.2

Factoriser, c'est transformer une somme ou une différence en un produit. ♣

Proposition 2.2

Soient a, b et k des nombres réels. Alors, on a :

$$k\times a+k\times b = k(a+b) \quad \textit{et} \quad k\times a-k\times b = k(a-b).$$

♠

Exemple 2.2

1. $A = 3x+6 = 3\times x+3\times 2 = 3(x+2)$.
2. $B = 2\sqrt{3}a-\sqrt{6}a^2 = \sqrt{3}a\times 2-\sqrt{3}a\times\sqrt{2}a = \sqrt{3}a\left(2-\sqrt{2}a\right)$.
3. $C = (x-1)(x+2)+(x-1)(2x-3) = (x-1)\left[(x+2)+(2x-3)\right] = (x-1)(3x-1)$.

✍ **Exercice 2.2** Factoriser les expressions suivantes :

$A = 2a^2+4a$ $\qquad$ $B = \sqrt{15}-2\sqrt{35}$

$C = 2x^2y-4xy+8xy^2$ $\qquad$ $D = (3x-5)(x-2)-(6x-10)(2x-3)$

2.3 Identités remarquables

Proposition 2.3

Soient a et b deux nombres réels. Alors, on a :

- $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$,
- $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$,
- $(a-b)(a+b) = a^2-b^2$.

Exemple 2.3

1. **Développement :**

   (a). Développons l'expression : $A = (x+3)^2$.

   On a :

   $$A = (x+3)^2 = x^2 + 2 \times x \times 3 + 3^2 = x^2 + 6x + 9.$$

   D'où : $\boxed{A = x^2 + 6x + 9}$

   (b). Développons l'expression : $B = \left(\sqrt{5} - \sqrt{2}\right)^2$.

   On a :

   $$\begin{aligned} B &= \left(\sqrt{5} - \sqrt{2}\right)^2 \\ &= \sqrt{5}^2 - 2 \times \sqrt{5} \times \sqrt{2} + \sqrt{2}^2 \\ &= 5 - 2\sqrt{10} + 2 \\ &= 7 - 2\sqrt{10}. \end{aligned}$$

   D'où : $\boxed{B = 7 - 2\sqrt{10}}$

   (c). Développons l'expression : $C = (2x-1)(2x+1)$.

   On a :

   $$C = (2x-1)(2x+1) = (2x)^2 - 1^2 = 4x^2 - 1.$$

   D'où : $\boxed{C = 4x^2 - 1}$

2. **Factorisation :**

   (a). Factorisons l'expression : $D = x^2 + 18x + 81$.

   On a :

   $$D = x^2 + 18x + 81 = x^2 + 2 \times x \times 9 + 9^2 = (x+9)^2.$$

   D'où : $\boxed{D = (x+9)^2}$

(b). Factorisons l'expression : $E = 4x^2 - 20x + 25$.

On a :

$$E = 4x^2 - 20x + 25 = (2x)^2 - 2 \times 2x \times 5 + 5^2 = (2x - 5)^2.$$

D'où : $\boxed{E = (2x - 5)^2}$

(c). Factorisons l'expression : $F = \frac{9}{4}x^2 - 49$.

On a :

$$F = \frac{9}{4}x^2 - 49 = \left(\frac{3}{2}x\right)^2 - 7^2 = \left(\frac{3}{2}x - 7\right)\left(\frac{3}{2}x + 7\right).$$

D'où : $\boxed{F = \left(\frac{3}{2}x - 7\right)\left(\frac{3}{2}x + 7\right)}$

Exercice 2.3

1. Développer et réduire les expressions suivantes :

$A = (x + 4)^2$ $\qquad$ $B = \left(5x - \sqrt{3}\right)^2$

$C = \left(\sqrt{2} - 3\right)\left(\sqrt{2} + 3\right)$ $\qquad$ $D = (2x - 1)^2 - (3x - 2)^2$

$E = \left(\sqrt{2} - \sqrt{3}\right)^2 - \left(\sqrt{2} - 1\right)\left(\sqrt{2} + 1\right)$ $\qquad$ $F = (x - y + 1)^2$

2. Factoriser les expressions suivantes :

$G = x^2 + 4x + 4$ $\qquad$ $H = 9x^2 - 6x + 1$ $\qquad$ $I = 25x^2 - 100$

$G = x^2 + x + \frac{1}{4}$ $\qquad$ $K = x^2 - 8x + 7$ $\qquad$ $L = 3x^2 - 5$