Sigma Matics
Niveau : 1ère année Bac SM Année scolaire : 2023-2024
Prof : Ayoub OUDIKA

Devoir N°1

Durée : 2h

Exercice 1

Soient P, Q et R trois propositions.

1. *Établir les équivalences suivantes :*
   (a) $[(P \text{ et } Q) \Rightarrow R] \Leftrightarrow [(P \Rightarrow R) \text{ ou } (Q \Rightarrow R)]$
   (b) $[(P \text{ ou } Q) \Rightarrow R] \Leftrightarrow [(P \Rightarrow R) \text{ et } (Q \Rightarrow R)]$
2. *Les propositions $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow R$ et $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$ sont-elles équivalents ?*
3. *On considère la proposition :* $(S) : (\neg P \text{ ou } \neg Q) \Rightarrow [(P \Rightarrow Q) \Rightarrow \neg P]$
   Exprimer (S) uniquement à l'aide des connecteurs "et" et "ou" puis donner sa valeur de vérité.

Exercice 2

1. *Montrer que* $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
2. *Montrer que :* $(\forall (a,b) \in \mathbb{Q}^2)\ a + b\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$

Exercice 3

Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R})\ |x-1| \leq x^2 - x + 1$

Exercice 4

Soient a et b deux nombres réels. Montrer que : $(\forall \varepsilon > 0)\ a < b + \varepsilon \Rightarrow a \leq b$

Exercice 5

Soient E, F et G trois ensembles. Montrer que : $(E \cup F) \times G = (E \times G) \cup (F \times G)$

Exercice 6

Soit f une application de $\mathbb{R}$ vers $[0,1]$ telle que : $(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2)\ f(x) + f(y) \leq f(x) \times f(y)$

1. *Montrer que* $f(0) = 0$.
2. *Montrer que :* $(\forall x \in \mathbb{R})\ f(x) = 0$

Exercice 7

On considère l'application $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ f(n) = 1 \times 2 \times \ldots \times n$

1. *Montrer que :* $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ 2^{n-1} \leq f(n) \leq n^n$
2. *Montrer que l'application f est injective.*
3. *L'application f est-elle surjective ? bijective ? (Justifier votre réponse)*

Exercice 8

Soient E et F deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$ une application. Montrer que :

$$(\forall (A,B) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(F))\ f(A) \cap B = \varnothing \Leftrightarrow A \cap f^{-1}(B) = \varnothing$$