Sigma Matics	**Devoir libre n° 2**	A.S : 2026–2027
Niveau : 1BACSM		Semestre : 1
Prof : A. OUDIKA	Ensembles et applications	Date : 22/11/2026

✎ Exercice 1 :

1. Écrire en extension les ensembles suivants :

$$A = \left\{ n \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \ / \ \frac{3n+2}{n-1} \in \mathbb{Z} \right\} \quad \text{et} \quad B = \left\{ (n,m) \in \mathbb{N}^2 \ / \ n + 2m = 11 \right\}$$

2. On considère l'ensemble : $C = \left\{ (n,m) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^* \ / \ \frac{1}{n} + \frac{1}{m} = \frac{1}{5} \right\}$
   (a) Montrer que : $(\forall (n,m) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*) : (n,m) \in C \iff (n-5)(m-5) = 25$
   (b) Déterminer en extension l'ensemble C.
3. On considère l'ensemble : $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^3 + y^3 < 1 < x + y\}$
   (a) Montrer que : $D \subset]0,1[\times]0,1[$
   (b) A-t-on : $]0,1[\times]0,1[\subset D$?

✎ Exercice 2 :

On considère l'ensemble : $G = \left\{ x + \sqrt{5}y \ / \ (x,y) \in \mathbb{Z}^2 \text{ et } x^2 - 5y^2 = 1 \right\}$

1. Vérifier que : $G \neq \varnothing$
2. Montrer que : $0 \notin G$
3. Montrer que : $(\forall a \in G) : \frac{1}{a} \in G$
4. Montrer que : $(\forall (a,b) \in G^2) : a \times b \in G$

✎ Exercice 3 :

Soit A une partie non vide d'un ensemble E et f l'application définie par :

$$\begin{aligned} f : \mathcal{P}(E) &\longrightarrow \mathcal{P}(E) \\ X &\longmapsto A \,\Delta\, X \end{aligned}$$

1. Calculer : $f(A)$, $f\left(\overline{A}\right)$, $f(E)$ et $f(\varnothing)$.
2. (a) Montrer que : $\forall X \in \mathcal{P}(E) : A \,\Delta\, (A \,\Delta\, X) = X$.
   (b) Montrer que : $\forall X \in \mathcal{P}(E) : (f \circ f)(X) = X$.
   (c) En déduire que f est une bijection.
   (d) En déduire que : $\forall B \in \mathcal{P}(E),\ \forall C \in \mathcal{P}(E) : \quad A \,\Delta\, B = A \,\Delta\, C \implies B = C$.

✎ Exercice 4 :

On considère l'application suivante :

$$\begin{aligned} g : \left[-\frac{1}{4}, +\infty\right[&\longrightarrow \left[\frac{5}{2}, +\infty\right[\\ x &\longmapsto \frac{5}{2} + \sqrt{x + \frac{1}{4}} \end{aligned}$$

1. Montrer que l'application g est bijective et déterminer son application réciproque g^{-1}.

2. Résoudre dans $\left[\frac{5}{2}, +\infty\right[$ l'équation $g(x) = g^{-1}(x)$.

✎ Exercice 5 :

Soit $h : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$ une application telle que : $(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2) : h(x) + h(y) \leqslant h(x) \times h(y)$

1. Montrer que : $h(0) = 0$
2. En déduire que : $(\forall x \in \mathbb{R}) : h(x) = 0$