Établ : L.Q Nawras Mogador	**Devoir libre n°1**	A.S : 2026-2027
Niveau : 1BACSEF		Semestre : 1
Prof : A. OUDIKA		Date : 16/11/2026

N.B : À rendre le 23 novembre 2026.

✎ Exercice 1 :

1. Étudier la valeur de vérité des propositions suivantes :

$$P_1 : \left(\sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{5}{3} \quad \text{ou} \quad 3 \text{ divise } 213\right) \qquad P_2 : \left(\frac{-5}{2} < \frac{-1}{2} \quad \text{et} \quad |-4| = -4\right)$$

$$P_3 : (\forall n \in \mathbb{N}) : \frac{n+3}{2} \in \mathbb{N} \qquad P_4 : (\exists n \in \mathbb{Z}) : n^2 - 1 = 0$$

2. On considère la proposition suivante : $P : (\forall x \in \mathbb{R}) : 2x^2 - 4x + 2 \leqslant 0$
   (a) Donner la négation de la proposition P.
   (b) Montrer que la proposition P est fausse.
3. On considère la fonction f définie par : $f(x) = \sqrt{x^2+3} - 2$
   Soit la proposition : $Q : (\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2) : f(a) = f(b) \Longrightarrow a = b$
   (a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$.
   (b) Donner la négation de la proposition Q.
   (c) En déduire que la proposition Q est fausse.
4. En utilisant le raisonnement par contraposée, montrer que :

$$\left(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\right) : (x \neq y \text{ et } xy \neq 1) \Longrightarrow \frac{x}{x^2+x+1} \neq \frac{y}{y^2+y+1}$$

5. Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : 1 + 7 + 7^2 + \cdots + 7^n = \dfrac{7^{n+1}-1}{6}$

✎ Exercice 2 :

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$

1. Montrer que la fonction f est bornée sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que la fonction f est impaire.
3. (a) Montrer que pour tous réels x et y, on a : $f(x) - f(y) = \dfrac{2(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)}(x-y)$
   (b) En déduire les variations de la fonction f sur chacun des intervalles $[0,1]$ et $[1,+\infty[$.
4. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

✎ Exercice 3 :

Soit h la fonction définie par : $h(x) = \sqrt{x^2-1}$

1. Déterminer D_h, l'ensemble de définition de la fonction h.
2. Étudier les variations de la fonction h sur chacun des intervalles $]-\infty,-1]$ et $[1,+\infty[$.