L'ensemble IN et notions d'arithmétique

(Solution de la série)

Réalisé par P.r A. OUDIKA

Exercice n°1

1) * Étudions la parité de a.

On a: $a = 6n+11 = 6n+10+1 = 2(3n+5)+1 = 2k+1$

où $k = 3n+5$. D'où a est un nombre impair.

* Étudions la parité de b.

On a: $b = 2n+4 = 2(n+2) = 2k$ où $k = n+2$.

D'où b est un nombre pair.

2) Déduisons la parité du nombre $a\times(-1)^b + b\times(-1)^a$.

D'après la question 1), on a a est un nombre impair et b est un nombre pair. Alors il existe k et k' dans IN tels que $a = 2k+1$ et $b = 2k'$.

Donc: $a\times(-1)^b + b\times(-1)^a = (2k+1)\times(-1)^{2k'} + 2k'\times(-1)^{2k+1}$

$= 2k+1-2k'$

$= 2(k-k')+1$

$= 2k''+1$ où $k'' = k-k'$

D'où le nombre $a\times(-1)^b + b\times(-1)^a$ est impair.

3) Montrons que le nombre $(a+1)^2+b^2$ est un multiple de 40.

On a: $(a+1)^2+b^2 = (6n+11+1)^2 + (2n+4)^2$

$= (6n+12)^2 + (2n+4)^2$

$= 36n^2+144n+144+4n^2+16n+16$

$= 40n^2+160n+160$

$= 40(n^2+4n+4)$

$= 40k$ où $k = n^2 + 4n + 4$

D'où le nombre $(a+1)^2 + b^2$ est un multiple de 40.

Exercice n°2

1) * Étudions la parité du nombre $A = n^2 - 3n + 4$.

1ère méthode :

On va étudier deux cas selon la parité de n.

→ Si n est pair, alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$.

Alors : $A = n^2 - 3n + 4$

$= (2k)^2 - 3 \times 2k + 4$

$= 4k^2 - 6k + 4$

$= 2(2k^2 - 3k + 2)$

$= 2p$ où $p = 2k^2 - 3k + 2$.

Donc A est un nombre pair.

→ Si n est impair, alors il existe $k' \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k' + 1$.

Alors : $A = n^2 - 3n + 4$

$= (2k'+1)^2 - 3(2k'+1) + 4$

$= 4k'^2 + 4k' + 1 - 6k' - 3 + 4$

$= 4k'^2 - 2k' + 2$

$= 2(2k'^2 - k' + 1)$

$= 2p$ où $p = 2k'^2 - k' + 1$

Donc A est un nombre pair.

Dans les deux cas A est un nombre pair.

2ème méthode :

On a : $A = n^2 - 3n + 4$

$= n^2 - 2n - n + 2 + 2$

$= n(n-2) - (n-2) + 2$

$= (n-2)(n-1) + 2$

Le nombre $(n-2)(n-1)$ est le produit de deux entiers consécutifs, donc il est pair, et 2 est un nombre pair et puisque la somme de deux nombres pairs est un nombre pair, alors A est pair.

* Étudions la parité du nombre $B = n^2 + 3n + 4$.

On procède de la même manière que pour le nombre A, on montre que B est un nombre pair.

2) Développons l'expression $(n^2 - 3n + 4)(n^2 + 3n + 4)$.

On a: $(n^2 - 3n + 4)(n^2 + 3n + 4) = [(n^2 + 4) - 3n][(n^2 + 4) + 3n]$

$= (n^2 + 4)^2 - (3n)^2$

$= n^4 + 8n^2 + 16 - 9n^2$

$= n^4 - n^2 + 16$

D'où: $\boxed{(n^2 - 3n + 4)(n^2 + 3n + 4) = n^4 - n^2 + 16}$

3) Déduisons que le nombre $n^4 - n^2 + 16$ est divisible par 4.

D'après la question 2), on a: $n^4 - n^2 + 16 = A \times B$

et d'après la question 1), on a montré que A et B sont des nombres pairs. Donc il existe k et k' dans $\mathbb{N}$ tel que $A = 2k$ et $B = 2k'$. D'où: $n^4 - n^2 + 16 = A \times B = 2k \times 2k' = 4kk'$

Par suite $n^4 - n^2 + 16$ est divisible par 4.

Exercice n°3

1) Montrons que le nombre $n(n+1)(n+2)(n+3)$ est un multiple de 4.

Le nombre $n(n+1)$ est le produit de deux entiers consécutifs, donc il est pair. Alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que :

$$n(n+1) = 2k$$

De même, le nombre $(n+2)(n+3)$ est le produit de deux entiers consécutifs, donc il est pair. Alors il existe $k' \in \mathbb{N}$ tel que : $(n+2)(n+3) = 2k'$

D'où : $n(n+1)(n+2)(n+3) = 2k \times 2k' = 4kk'$

Par suite $n(n+1)(n+2)(n+3)$ est un multiple de 4.

2) Existe-il un entier naturel n tel que :

$$n(n+1)(n+2)(n+3) = 2010 \ ?$$

D'après la question 1), on a montré que le nombre $n(n+1)(n+2)(n+3)$ est un multiple de 4 pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Or 2010 n'est pas un multiple de 4, alors il n'existe aucun entier naturel n tel que : $n(n+1)(n+2)(n+3) = 2010$.

Exercice n°4

* Montrons que $\frac{n(n+1)}{2}$ est un entier naturel.

on a $n(n+1)$ est un produit de deux entiers consécutifs, donc il est pair, c'est-à-dire 2 divise $n(n+1)$.

D'où : $\frac{n(n+1)}{2}$ est un entier naturel.

* Montrer que $\frac{n^3-n}{3}$ est un entier naturel.

Étudions les cas selon le reste de la division euclidienne de

n par 3.

→ Si n est divisible par 3, alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 3k$.

Donc, $n^3 - n = (3k)^3 - 3k = 27k^3 - 3k = 3(3k^3 - k)$

D'où $n^3 - n$ est divisible par 3 et donc $\frac{n^3 - n}{3}$ est un entier naturel.

→ Si n n'est pas divisible par 3, alors le reste de la division euclidienne de n par 3 est 1 ou 2.

Si le reste de la division euclidienne de n par 3 est 1, alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 3k + 1$.

Donc : $n^3 - n = n(n^2 - 1)$

$= (3k+1)\left[(3k+1)^2 - 1\right]$

$= (3k+1)(9k^2 + 6k + 1 - 1)$

$= (3k+1)(9k^2 + 6k)$

$= 3(3k+1)(3k^2 + 2k)$

D'où 3 divise $n^3 - 3$ et donc $\frac{n^3 - n}{3}$ est un entier naturel.

Si le reste de la division euclidienne de n par 3 est 2, alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 3k + 2$.

Donc : $n^3 - n = n(n^2 - 1)$

$= (3k+2)\left[(3k+2)^2 - 1\right]$

$= (3k+2)(9k^2 + 12k + 4 - 1)$

$= (3k+2)(9k^2 + 12k + 3)$

$= 3(3k+2)(3k^2 + 4k + 1)$

D'où $n^3 - n$ est divisible par 3, et donc $\frac{n^3 - n}{3}$ est un entier naturel.

Dans tous les cas, on a $\frac{n^3-n}{3}$ est un entier naturel.

Exercice n°5

1-(a) Montrons que n^2-1 est divisible par 8.

On a n est impair, alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k+1$.

Donc: $n^2-1 = (2k+1)^2 - 1$

$= 4k^2 + 4k + 1 - 1$

$= 4k(k+1)$

De plus, $k(k+1)$ est le produit de deux entiers consécutifs, donc il est pair, c'est-à-dire il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que:

$k(k+1) = 2p$

D'où: $n^2-1 = 4k(k+1) = 4 \times 2p = 8p$

Par suite n^2-1 est divisible par 8.

(b) Déduisons que n^4-1 est divisible par 16.

On a: $n^4-1 = (n^2)^2 - 1^2 = (n^2-1)(n^2+1)$

D'après la question (a), on a n^2-1 est divisible par 8, alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n^2-1 = 8k$. (*)

De plus, puisque n est impair, alors il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p+1$. Donc: $n^2+1 = (2p+1)^2 + 1$

$= 4p^2 + 4p + 1 + 1$

$= 2(2p^2 + 2p + 1)$ (**)

De (*) et (**) on obtient: $n^4-1 = (n^2-1)(n^2+1)$

$= 8k \times 2(2p^2 + 2p + 1)$

$= 16k(2p^2 + 2p + 1)$

Par suite n^4-1 est divisible par 16.

2) Montrons que a^4+b^4-2 est un multiple de 16.

on a a et b sont des entiers impairs et on a :

$$a^4+b^4-2=(a^4-1)+(b^4-1)$$

Donc d'après la question 1-(b), a^4-1 et b^4-1 sont divisibles par 16, alors $a^4-1=16k$ et $b^4-1=16k'$ où k et k' sont dans $\mathbb{N}$.

D'où : $a^4+b^4-2=(a^4-1)+(b^4-1)=16k+16k'=16(k+k')$

par suite a^4+b^4-2 est un multiple de 16.

Exercice n°6

1) Décomposons les nombres a et b en produit de facteurs premiers.

on a :

2040	2
1020	2
510	2
255	3
85	5
17	17
1	

2028	2
1014	2
507	3
169	13
13	13
1	

D'où : $\boxed{a=2^4\times 3\times 5\times 17 \text{ et } b=2^3\times 3\times 13^2}$

2) Déterminons $a\wedge b$ et $a\vee b$.

D'après la question 1), on a : $a=2^4\times 3\times 5\times 17$ et $b=2^3\times 3\times 13^2$

Donc :

* $a\wedge b=2^3\times 3=24$
* $a\vee b=2^4\times 3\times 5\times 13^2\times 17=689\,520$

D'où : $\boxed{a\wedge b=24 \text{ et } a\vee b=689\,520}$

3) simplifions les nombres $\frac{2040}{2028}$ et $\sqrt{2040 \times 2028}$.

D'après la question 1), on a: $2040 = 2^4 \times 3 \times 5 \times 17$ et $2028 = 2^3 \times 3 \times 13^2$

Alors: * $\frac{2040}{2028} = \frac{2^4 \times 3 \times 5 \times 17}{2^3 \times 3 \times 13^2} = \frac{2 \times 5 \times 17}{13^2} = \frac{170}{169}$

* $\sqrt{2040 \times 2028} = \sqrt{2^4 \times 3 \times 5 \times 17 \times 2^3 \times 3 \times 13^2}$

$= \sqrt{2^4 \times 3^2 \times 13^2 \times 5 \times 17}$

$= 2^2 \times 3 \times 13 \sqrt{5 \times 17}$

$= 156 \sqrt{85}$

D'où: $\boxed{\frac{2040}{2028} = \frac{170}{169}}$ et $\boxed{\sqrt{2040 \times 2028} = 156\sqrt{85}}$

Exercice n°7

1) Décomposons les nombres x et y en produit de facteurs premiers.

On a:

2160	2
1080	2
540	2
270	2
135	3
45	3
15	3
5	5
1	

4860	2
2430	2
1215	3
405	3
135	3
45	3
15	3
5	5
1	

D'où: $\boxed{x = 2^4 \times 3^3 \times 5 \text{ et } y = 2^2 \times 3^5 \times 5}$

2) Déterminons $x \wedge y$ et $x \vee y$.

D'après la question 1), on a : $x = 2^4 \times 3^3 \times 5$ et $y = 2^2 \times 3^5 \times 5$

Alors : * $x \wedge y = 2^2 \times 3^3 \times 5 = 540$

* $x \vee y = 2^4 \times 3^5 \times 5 = 19440$

D'où : $\boxed{x \wedge y = 540 \text{ et } x \vee y = 19440}$

3) Déterminons la décomposition en produit de facteurs premiers du nombre $x^3 \times y^2$.

D'après la question 1), on a : $x = 2^4 \times 3^3 \times 5$ et $y = 2^2 \times 3^5 \times 5$

Alors : $x^3 \times y^2 = (2^4 \times 3^3 \times 5)^3 \times (2^2 \times 3^5 \times 5)^2$

$= 2^8 \times 3^9 \times 5^3 \times 2^4 \times 3^{10} \times 5^2$

$= 2^{12} \times 3^{19} \times 5^5$

D'où : $\boxed{x^3 \times y^2 = 2^{12} \times 3^{19} \times 5^5}$

4) Montrons que $\sqrt{xy} \in \mathbb{N}$.

On a : $\sqrt{xy} = \sqrt{2^4 \times 3^3 \times 5 \times 2^2 \times 3^5 \times 5}$ (D'après la question 1))

$= \sqrt{2^6 \times 3^8 \times 5^2}$

$= 2^3 \times 3^4 \times 5$

$= 3240$

D'où : $\sqrt{xy} \in \mathbb{N}$.

5) Écrivons le nombre $\frac{x}{y}$ sous forme d'une fraction irréductible.

On a : $\frac{x}{y} = \frac{2^4 \times 3^3 \times 5}{2^2 \times 3^5 \times 5} = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9}$ (D'après la question 1))

D'où : $\boxed{\frac{x}{y} = \frac{4}{9}}$

Exercice n°8

1) * Montrons que le nombre α est un multiple de 3.

On a: $\alpha = 7^{n+2} - 7^n = 7^n(7^2 - 1) = 7^n(49-1) = 7^n \times 48 = 3 \times 16 \times 7^n$

D'où: α est un multiple de 3.

* Montrons que β est un multiple de 13.

On a: $\beta = 3 \times 7^{n+1} + 5 \times 7^n = 7^n(3 \times 7 + 5) = 7^n \times 26 = 13 \times 2 \times 7^n$

D'où: β est un multiple de 13.

2) Déterminons la décomposition en produit de facteurs premiers de α et β.

On a: $\alpha = 7^{n+2} - 7^n = 7^n(7^2 - 1) = 7^n(49-1) = 7^n \times 48$

et on a:

48	2
24	2
12	2
6	2
3	3
1	

Alors: $48 = 2^4 \times 3$ et donc: $\alpha = 2^4 \times 3 \times 7^n$

De même, on a: $\beta = 3 \times 7^{n+1} + 5 \times 7^n$

$= 7^n(3 \times 7 + 5)$

$= 7^n \times 26$

et on a: $26 = 2 \times 13$, donc: $\beta = 2 \times 7^n \times 13$

Par conséquent: $\boxed{\alpha = 2^4 \times 3 \times 7^n}$ et $\boxed{\beta = 2 \times 7^n \times 13}$

3) Déduisons $\alpha \wedge \beta$ et $\alpha \vee \beta$.

D'après la question 2), on a: $\alpha = 2^4 \times 3 \times 7^n$ et $\beta = 2 \times 7^n \times 13$

Alors: * $\alpha \wedge \beta = 2 \times 7^n$

* $\alpha \vee \beta = 2^4 \times 3 \times 7^n \times 13 = 624 \times 7^n$

D'où: $\boxed{\alpha \wedge \beta = 2 \times 7^n}$ et $\boxed{\alpha \vee \beta = 624 \times 7^n}$

4) Vérifions que $\alpha \times \beta = (\alpha \wedge \beta) \times (\alpha \vee \beta)$.

On a: $\alpha \times \beta = 2^4 \times 3 \times 7^n \times 2 \times 7^n \times 13$ (D'après la question 2))

$= (2 \times 7^n) \times (2^4 \times 3 \times 13 \times 7^n)$

$= (2 \times 7^n) \times (624 \times 7^n)$

$= (\alpha \wedge \beta) \times (\alpha \vee \beta)$ (D'après la question 3))

D'où: $\boxed{\alpha \times \beta = (\alpha \wedge \beta) \times (\alpha \vee \beta)}$

Exercice n°9

1) Vérifions que $\frac{n+7}{n+1} = 1 + \frac{6}{n+1}$.

On a: $\frac{n+7}{n+1} = \frac{n+1+6}{n+1} = \frac{n+1}{n+1} + \frac{6}{n+1} = 1 + \frac{6}{n+1}$

D'où: $\boxed{\frac{n+7}{n+1} = 1 + \frac{6}{n+1}}$

2) Déterminons les valeurs de n pour lesquelles $\frac{n+7}{n+1} \in \mathbb{N}$.

D'après la question 1), on a $\frac{n+7}{n+1} = 1 + \frac{6}{n+1}$

Donc $\frac{n+7}{n+1} \in \mathbb{N}$ si et seulement si $\frac{6}{n+1} \in \mathbb{N}$

si et seulement si $n+1$ divise 6

Les diviseurs de 6 sont 1, 2, 3 et 6.

On a donc: $n+1 = 1$ ou $n+1 = 2$ ou $n+1 = 3$ ou $n+1 = 6$

c.à.d: $n=0$ ou $n=1$ ou $n=2$ ou $n=5$.

D'où les valeurs de n pour lesquelles $\frac{n+7}{n+1} \in \mathbb{N}$ sont: **0, 1, 2 et 5**

c) Déterminons les valeurs de n pour lesquelles $\frac{3n+28}{n+4} \in \mathbb{N}$.

On a: $\frac{3n+28}{n+4} = \frac{3n+12+16}{n+4} = \frac{3(n+4)}{n+4} + \frac{16}{n+4} = 3 + \frac{16}{n+4}$

Donc $\frac{3n+28}{n+4} \in \mathbb{N}$ si et seulement si $\frac{16}{n+4} \in \mathbb{N}$

si et seulement si $n+4$ divise 16

les diviseurs de 16 sont : 1, 2, 4, 8 et 16

on a donc: $n+4=1$ ou $n+4=2$ ou $n+4=4$ ou $n+4=16$

c.à.d: $n=-3$ ou $n=-2$ ou $n=0$ ou $n=12$

comme $n \in \mathbb{N}$, alors: $n=0$ ou $n=12$

D'où les valeurs de n pour lesquelles $\frac{3n+28}{n+4} \in \mathbb{N}$ sont: **0 et 12**

Exercice n°10

1) Montrons que $x+y$ et $x-y$ ont la même parité.

On a trois cas selon la parité de x et y.

* Si x et y sont pairs, alors il existe k et k' dans $\mathbb{N}$ tels que:

$$x = 2k \text{ et } y = 2k'$$

Donc: → $x+y = 2k+2k' = 2(k+k')$

→ $x-y = 2k-2k' = 2(k-k')$

D'où $x+y$ sont pairs.

* Si x et y sont impairs, alors il existe k et k' dans $\mathbb{N}$ tels que:

$$x = 2k+1 \text{ et } y = 2k'+1$$

Donc: → $x+y = 2k+1+2k'+1 = 2(k+k'+1)$

$\rightarrow x-y = 2k+1-(2k'+1) = 2(k-k')$

D'où: $x+y$ et $x-y$ sont pairs.

* Si x est impair et y est pair, alors il existe k et k' dans $\mathbb{N}$ tels que: $x = 2k+1$ et $y = 2k'$

Donc: $\rightarrow x+y = 2k+1+2k' = 2(k+k')+1$

$\rightarrow x-y = 2k+1-2k' = 2(k-k')+1$

D'où: $x+y$ et $x-y$ sont impairs

Dans tous les cas, $x+y$ et $x-y$ ont la même parité.

2) Déterminons les diviseurs de 28.

Les diviseurs de 28 sont: $\boxed{1, 2, 4, 7, 14, 28}$

3) Déterminons tous les couples d'entiers naturels (x,y) vérifiant:

$$x^2 - y^2 = 28$$

On a: $x^2-y^2 = 28$

S.q: $(x-y)(x+y) = 28$

D'après la question 1), $x-y$ et $x+y$ ont la même parité.

Alors: $(x-y)(x+y) = 28$

S.q: $\begin{cases} x-y = 2 \\ x+y = 14 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x-y = 14 \\ x+y = 2 \end{cases}$

* Résolvons le système $\begin{cases} x-y = 2 \\ x+y = 14 \end{cases}$.

On a: $\begin{cases} x-y = 2 \\ x+y = 14 \end{cases}$ S.q: $\begin{cases} x = 2+y \\ 2+y+y = 14 \end{cases}$ S.q: $\begin{cases} x = 2+y \\ 2y = 10 \end{cases}$

S.q: $\begin{cases} x = 2+5 \\ y = 5 \end{cases}$ S.q: $\begin{cases} x = 7 \\ y = 5 \end{cases}$

D'où la solution de ce système est le couple $(7,5)$.

* Résolvons le système $\begin{cases} x-y=14 \\ x+y=2 \end{cases}$

On a: $\begin{cases} x-y=14 \\ x+y=2 \end{cases}$ S.q: $\begin{cases} x=14+y \\ 14+y+y=2 \end{cases}$ S.q: $\begin{cases} x=14+y \\ 2y=-12 \end{cases}$

S.q: $\begin{cases} x=14-6 \\ y=-6 \end{cases}$ S.q: $\begin{cases} x=8 \\ y=-6 \end{cases}$

D'où la solution de ce système est le couple $(8,-6)$.

Par suite le seul couple d'entiers naturel (x,y) vérifiant $x^2-y^2=28$ est: $(7,5)$.

4) Déterminons tous les couples d'entiers naturels (a,b) vérifiant:

$$ab+3a+2b=28$$

On a: $ab+3a+2b=28$

S.q: $ab+3a+2b+6=28+6$

S.q: $a(b+3)+2(b+3)=34$

S.q: $(a+2)(b+3)=34$

Les diviseurs de 34 sont: 1, 2, 17 et 34

Donc les cas possibles sont:

$\begin{cases} a+2=1 \\ b+3=34 \end{cases}$ ou $\begin{cases} a+2=34 \\ b+3=1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} a+2=2 \\ b+3=17 \end{cases}$ ou $\begin{cases} a+2=17 \\ b+3=2 \end{cases}$

* $\begin{cases} a+2=1 \\ b+3=34 \end{cases}$ est équivalent à $\begin{cases} a=-1 \\ b=31 \end{cases}$, ce qui impossible, car a et b sont des entiers naturels.

* $\begin{cases} a+2=34 \\ b+3=1 \end{cases}$ est équivalent à $\begin{cases} a=32 \\ b=-2 \end{cases}$, ce qui impossible.

* $\begin{cases} a+2=2 \\ b+3=17 \end{cases}$ est équivalent à $\begin{cases} a=0 \\ b=14 \end{cases}$.

* $\begin{cases} a+2=17 \\ b+3=2 \end{cases}$ est équivalent à $\begin{cases} a=15 \\ b=-1 \end{cases}$, ce qui impossible.

D'où le seul couple d'entiers naturels (a,b) vérifiant $ab+3a+2b=28$ est: $(0,14)$.

Exercice n°11

1) vérifions que le nombre 337 est premier.

On a: $\sqrt{337} \simeq 18,35$

Les nombres premiers qui sont inférieurs à 18,35 sont:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17$$

Or le nombre 337 n'est pas divisible par aucun de ses nombres, alors il est premier.

2) Déterminons tous les couple d'entiers naturels (x,y) tels que:

$$x^2-y^2=337$$

On a: $x^2-y^2=337$ est équivalent à: $(x-y)(x+y)=337$

Les cas possibles donc sont:

$$\begin{cases} x-y=1 \\ x+y=337 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x-y=337 \\ x+y=1 \end{cases}$$

* le système $\begin{cases} x-y=1 \\ x+y=337 \end{cases}$ est équivalent à $\begin{cases} x=1+y \\ 1+y+y=337 \end{cases}$

est équivalent à $\begin{cases} x=1+y \\ 2y=336 \end{cases}$

est équivalent à $\begin{cases} x=1+168 \\ y=168 \end{cases}$

est équivalent à $\begin{cases} x = 169 \\ y = 168 \end{cases}$

* Le système $\begin{cases} x - y = 337 \\ x + y = 1 \end{cases}$ est équivalent à $\begin{cases} x = 337 + y \\ 337 + y + y = 1 \end{cases}$

est équivalent à $\begin{cases} x = 337 + y \\ 2y = -336 \end{cases}$

est équivalent à $\begin{cases} x = 337 - 168 \\ y = -168 \end{cases}$

est équivalent à $\begin{cases} x = 169 \\ y = -168 \end{cases}$

ce qui impossible, car x et y sont dans $\mathbb{N}$.

Par suite le seul couple d'entiers naturels (x, y) tels que $x^2 - y^2 = 337$ est : $(169, 168)$

Exercice n°12

Déterminons tous les couples d'entiers naturels (a, y) tels que

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 7344 \\ x \wedge y = 12 \end{cases}$$

puisque $x \wedge y = 12$, on peut écrire x et y sous la forme $x = 12a$ et $y = 12b$ où a et b sont des entiers naturels avec $a \wedge b = 1$.

En remplaçant x et y dans la première équation :

$$(12a)^2 - (12b)^2 = 7344$$

c.à.d. $144a^2 - 144b^2 = 7344$

c.à.d. $144(a^2 - b^2) = 7344$

c.à.d. $a^2 - b^2 = \frac{7344}{144} = 51$

c.à.d. $(a - b)(a + b) = 51$

Les décompositions positives possibles de 51 sont : 1×51, 51×1, 3×17 et 17×3.

Les cas possibles donc sont :

$$\begin{cases} a-b=1 \\ a+b=51 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a-b=51 \\ a+b=1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a-b=3 \\ a+b=17 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a-b=17 \\ a+b=3 \end{cases}$$

* $\begin{cases} a-b=1 \\ a+b=51 \end{cases}$ est équivalent à $\begin{cases} a=26 \\ b=25 \end{cases}$.

* $\begin{cases} a-b=51 \\ a+b=1 \end{cases}$ est équivalent à $\begin{cases} a=26 \\ b=-25 \end{cases}$, ce qui impossible, car a et b sont des entiers naturels.

* $\begin{cases} a-b=3 \\ a+b=17 \end{cases}$ est équivalent à $\begin{cases} a=10 \\ b=7 \end{cases}$.

* $\begin{cases} a-b=17 \\ a+b=3 \end{cases}$ est équivalent à $\begin{cases} a=10 \\ b=-7 \end{cases}$, ce qui impossible.

D'où les couples d'entiers naturels possibles sont : $(26,25)$ et $(10,7)$.

Il est claire que $26\wedge25=10\wedge7=1$.

On remonte à x et y :

→ pour le couple $(26,25)$:

* $x=12a=12\times26=312$
* $y=12b=12\times25=300$

→ pour le couple $(10,7)$:

* $x=12a=12\times10=120$
* $y=12b=12\times7=84$

<u>Conclusion :</u>

Les couples d'entiers naturels (x,y) recherchés sont :

$(312,300)$ et $(120,84)$