Niveau : Tronc commun scientifique
Prof : Ayoub OUDIKA

Arithmétique dans $\mathbb{N}$

Série d'exercices

★★★ ★★★ ★★★

Exercice 1

Parmi les nombres suivants, déterminer les nombres pairs et les nombres impairs :

$$12^2 \quad ; \quad 367890 \quad ; \quad 16485 \quad ; \quad 211 \times 94 \quad ; \quad 37 \times 301 \quad ; \quad 15 \times 1731$$

Exercice 2

Parmi les nombres suivants, déterminer les nombres qui sont divisibles par 3 :

$$1001001 \quad ; \quad 3752 \quad ; \quad 79541 \quad ; \quad 3140 \quad ; \quad 120052005$$

Exercice 3

Déterminer les diviseurs de chacun des nombres suivants :

$$144 \quad ; \quad 38 \quad ; \quad 45 \quad ; \quad 207$$

Exercice 4

1. Décomposer en facteurs premiers les nombres 3240 et 1440.
2. En déduire une simplification de $\sqrt{3240}$ et $\sqrt{1440}$.
3. En déduire que $\sqrt{3240 \times 1440}$ est un entier naturel.

Exercice 5

On pose $a = 156$ et $b = 495$.

1. Décomposer a et b en facteurs premiers.
2. Déterminer $PGCD(a; b)$ et $PPCM(a, b)$.
3. Vérifier que $PGCD(a, b) \times PPCM(a, b) = ab$.

Exercice 6

Soient a et b deux entiers naturels.

1. Montrer que si a et b sont pairs, alors $a + b$ est pair.
2. Montrer que si a et b sont impairs, alors $a + b$ est pair.
3. Montrer que a est pair et b est impair, alors $a + b$ est impair.
4. Montrer que si a et b sont pairs, alors ab est pair.
5. Montrer que si a et b sont impairs, alors ab est impair.
6. Montrer que si a est pair et b est impair, alors ab est pair.

Exercice 7

Soit a un entier naturel pair.

1. Montrer que $a^2 - 1$ est est un multiple de 8.
2. En déduire que $a^4 - 1$ est un multiple de 16.
3. Montrer que si m et n sont deux entiers naturels pairs, alors 8 divise $m^2 + n^2 + 6$.

Exercice 8

1. Déterminer le nombre a pour que $4a3a$ soit divisible par 9.
2. Déterminer les nombres a et b pour que le nombre $65ab$ soit divisible par 3 et 4.

Exercice 9

Soit $x \in \mathbb{N}$.

1. Développer et réduire $(x+1)^2 - x^2$.
2. En déduire que tout entier naturel pair est la différence de deux carres parfaits.
3. Écrire le nombre 2023 sous forme d'une différence de deux carrés parfaits.
4. On considère le nombre $A = n^2 + n + 7$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Montrer que A est pair.
   (b) En déduire que A est la différence de deux carrés parfaits.

Exercice 10

Soient m et n dans $\mathbb{N}$ avec $m > n$.

1. Montrer que $m + n$ et $m - n$ sont de même parité.
2. Déterminer les entiers naturels x et y tel que $x^2 - y^2 = 12$.

Exercice 11

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $A = 3n^2 + 15n + 7$ est un nombre impair.
2. Montrer que $B = 5n^2 - 7n + 4$ est un nombre pair.
3. Montrer que le nombre $C = n^4 - n^2 + 16$ est un multiple de 4.

Exercice 12

Déterminer le plus grand commun diviseur et le plus petit commun multiple de a et b dans chaque cas :

1. $a = 214$ et $b = 816$
2. $a = 7371$ et $b = 4095$
3. $a = 1954$ et $b = 1963$

Exercice 13

Montrer que pour tout entier naturel n, le nombre $\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$ est un entier naturel.

Exercice 14

1. Soient a, b, d, x et y dans $\mathbb{N}$.
   (a) Montrer que si d divise a et b, alors d divise $ax + by$.
   (b) Montrer que si d divise ab et $a + b$, alors d divise a^2.
2. Déterminer $(n^2 + n + 1) \wedge (n + 1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Déterminer $(2^{n+1} - 1) \wedge (2^n - 1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 15

Parmi les nombres suivants, déterminer les nombres premiers :

$$119 \quad ; \quad 503 \quad ; \quad 1559 \quad ; \quad 2523 \quad ; \quad 341 \quad ; \quad 2027 \quad ; \quad 23 \times 3 + 2 \quad ; \quad 36 \times 5 \times 7 + 27$$

Exercice 16

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que $n^3 - n = (n^2 - 2n + 3) - 6$.
2. En déduire les valeur de n pour que $\dfrac{n^3 - n}{n + 2}$ soit un entier naturel.

Exercice 17

1. Soit p un nombre premier supérieur à 3.
   On pose $a = \dfrac{p + 1}{2}$ et $b = \dfrac{p - 1}{2}$.
   (a) Vérifier que a et b sont deux entiers naturels.
   (b) Calculer $a^2 - b^2$ fonction de p.
2. Montrer que tout nombre premier p supérieur à 3, s'écrit sous la forme d'une différence des carrés de deux entiers consécutifs.
   Donner cette différence dans le cas où $p = 41$.