Établissement : Sigma Matics
Niveau : 1BAC-SM
Professeur : Ayoub OUDIKA

Année scolaire : 2026-2027
Semestre : 1
Donnée le : 12/03/2026

Ensembles

▷ Série d'exercices n°2 ◁

Exercice 1

Écrire en extension (c'est-à-dire en donnant tous leurs éléments) les ensembles suivants :

$$A_1 = \left\{ x \in \mathbb{Z} \,/\, \frac{2x+3}{x+2} \in \mathbb{Z} \right\}$$
$$A_2 = \left\{ \frac{p}{q} \,/\, (p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*,\ 1 \leq p \leq 2q \leq 7 \right\}$$
$$A_3 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{Z}^2 \,/\, x^2 + xy - 2y^2 + 5 = 0 \right\}$$
$$A_4 = \{ x \in \mathbb{Z} \,/\, \ ||3x| - 2| < 1 \}$$

Exercice 2

On considère les ensembles suivants :

$$E = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ 4x - y = 1 \right\}$$

et

$$F = \{ (t+1, 4t+3) / \ t \in \mathbb{R} \}$$

Démontrer que $E = F$.

Exercice 3

On considère l'ensemble suivant :

$$E = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ / \ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 3 \right\}$$

1. Montrer que : $E \neq \varnothing$
2. Montrer que : $E \subset [0,9] \times [0,9]$
3. A-t-on $E = [0,9] \times [0,9]$?

Exercice 4

Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E.
Pour tout $X \subset E$, on note X^c le complémentaire de X dans E.
Démontrer les lois de de Morgan suivantes :

$$(1) \quad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$
$$(2) \quad (A^c)^c = A$$
$$(4) \quad (A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

Exercice 5

Soient E et F deux ensembles.

1. Montrer que : $E \subset F \iff \mathcal{P}(E) \subset \mathcal{P}(F)$
2. Établir que : $\mathcal{P}(E \cap F) = \mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F)$
3. A-t-on $\mathcal{P}(E \cup F) = \mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F)$?

Exercice 6

Soient A et B deux parties d'un ensemble E.
Résoudre les équations d'inconnue $X \in \mathcal{P}(E)$:

$$(E_1) : \quad X \cap A = B \qquad (E_2) : \quad X \cup A = B$$

Exercice 7

On rappelle que la différence symétrique de deux parties A et B d'un ensemble E est définie par :

$$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

1. Montrer que : $A \triangle B = \varnothing \Longrightarrow A = B$
2. Déterminer $A \triangle \varnothing$, $A \triangle E$, $A \triangle A$.
3. Que vaut $A \triangle B$ si $A \subset B$?
4. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $A \triangle B = A \cup B$.

Exercice 8

On considère l'ensemble suivant :

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ x^2 + y^2 \leq 1 \right\}$$

Montrer que l'ensemble D ne peut pas s'écrire comme le produit cartésien de deux parties de $\mathbb{R}$.

Exercice 9

Soient E, F et G trois ensembles.
Montrer que : $(E \cup F) \times G = (E \times G) \cup (F \times G)$