Niveau : 1ère année Bac SM
Prof : Ayoub OUDIKA

Ensembles
Série d'exercices

★★★ ★★★ ★★★

Exercice 1 Déterminer $\mathcal{P}(\varnothing)$ et $\mathcal{P}\left(\mathcal{P}(\varnothing)\right)$.

Exercice 2 Soient E un ensemble non vide et A est une partie de E. En utilisant le diagramme de Van, construire les ensembles suivants :

$A \cup A$; $A \cap A$; $A \cup \varnothing$; $A \cap \varnothing$; $A \cup E$; $A \cap E$; $A \cup \complement_E A$; $A \cap \complement_E A$

Exercice 3 On considère les deux ensembles $A = \{1, 2, 3, 4\}$ et $B = \{3, 4, 4, 5\}$.
Déterminer l'ensemble X qui vérifie $(A \setminus X) \cup (X \setminus A) = B$.

Exercice 4 On pose $E = [0, 1]$. Déterminer $\complement_E A$, $\complement_E B$ et $\complement_E C$ avec $A = \left[1, \frac{1}{2}\right]$, $B =]0, 1[$ et $C = [0, 1]$.

Exercice 5 Soient p et q deux nombres réels. On considère les ensembles A et B avec

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 + x + p = 0\right\} \quad \text{et} \quad B = \left\{x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 + qx - 3 = 0\right\}.$$

On suppose que $A \cup B = \{-2, -1, 1, 3\}$. Déterminer en extension les deux ensembles A et B.

Exercice 6 On considère les deux ensembles $A = \left\{\frac{\pi}{4} + 2\frac{k\pi}{5} \,/\, k \in \mathbb{Z}\right\}$ et $B = \left\{\frac{\pi}{2} + 2\frac{k\pi}{5} \,/\, k \in \mathbb{Z}\right\}$.
Montrer que $A \cap B = \varnothing$.

Exercice 7 Soit $a \in \mathbb{N}$. On note $a\mathbb{N}$ l'ensemble des multiples positifs de a.

1. Déterminer $2\mathbb{N} \cap 3\mathbb{N}$, $6\mathbb{N} \cap 3\mathbb{N}$ et $6\mathbb{N} \cap 4\mathbb{N}$.
2. Comment on peut écrire les éléments de $6\mathbb{N} \cap 4\mathbb{N}$?

Exercice 8 On pose $A = \left\{x \in \mathbb{R} \,/\, \frac{3x+3}{3x+2} \in \mathbb{Z}\right\}$ et $B = \left\{x \in \mathbb{R} \,/\, \frac{1}{3x+2} \in \mathbb{Z}\right\}$.
Montrer que $A = B$.

Exercice 9 On considère les deux ensembles $A = \{3\pi + 2k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}\}$ et $B = \left\{\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3} \,/\, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

1. Montrer que $A \subset B$.
2. A-t-on $B \subset A$?

Exercice 10 Soient A et B deux parties d'un ensemble E.
Montrer que : $\complement_{E\times E}(A \times B) = \left[\left(\complement_E A\right) \times E\right] \cup \left[E \times \left(\complement_E B\right)\right]$

Exercice 11 On considère l'ensemble $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^2 + y^2 \leq 1\}$.
Montrer qu'il n'existe pas deux parties A et B de $\mathbb{R}$ telles que $L = A \times B$.

Exercice 12 Soient A, B et C trois ensembles.
Montrer que : $A \subset B \subset C \Leftrightarrow A \cup B = B \cap C$

Exercice 13 Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E.
Montrer que :

1. $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$
2. $A \cap \complement_E B = A \cap \complement_E C \Leftrightarrow A \cap B = A \cap C$

Exercice 14 On considère les deux ensembles $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^2 - xy - 2y^2 = 0\}$ et

$$F = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x + y = 0\right\}.$$

1. Montrer que $F \subset E$.
2. Déterminer le nombre réel y tel que $(1, y) \in E$. A-t-on $E \subset F$?
3. Montrer que $E = F \cup G$ où G est un ensemble à déterminer.
4. On considère les ensembles $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y^2 - 2xy + 2x - 2y = 0\}$,

   $$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y = x + 1 + \sqrt{x^2 + 1}\right\} \quad \text{et} \quad B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y = x + 1 - \sqrt{x^2 + 1}\right\}.$$

   (*a*) Montrer que $H = A \cup B$.
   (*b*) Déterminer $H \cap F$.

Exercice 15 Soient a et b deux nombres réels distincts.
On pose $E = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x^2 + 2bx + a = 0\}$ et $F = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x^2 + 2ax + b = 0\}$.
Soit x un élément de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que : $x \in E \cap F \Rightarrow x = \dfrac{1}{2}$
2. Montrer que : $E \cap F \neq \varnothing \Rightarrow a + b = -\dfrac{1}{4}$
3. Montrer que : $E \cap F = \varnothing \Rightarrow a + b \neq -\dfrac{1}{4}$

Exercice 16 On considère les ensembles $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^2 - y^2 = 3x - 4y\}$,

$$B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 2xy = 4x + 3y\right\} \quad \text{et} \quad C = \left\{x^2 + y^2 \ / \ (x, y) \in A \cap B\right\}.$$

Déterminer C puis $C \times \{1, 2\}$ et $\{2\} \times C$.

Exercice 17 A, B, C et D quartes parties d'un ensemble E.
Montrer que : $A \times B = C \times D \Rightarrow (A = C \text{ et } B = D)$

Exercice 18 Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $A = 4n^2 + 4n - 47$.

1. Montrer que A est un nombre pair.
2. On suppose que A est un carré parfait.
   (*a*) Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $A = (2k + 1)^2$.
   (*b*) En déduire que $(n - k)(n + k + 1) = 12$.
3. On pose $H = \left\{y \ / \ y = \dfrac{2x^2 + 5x + 9}{2x + 3} : x \in \mathbb{Q}^+\right\}$.
   Déterminer $\mathbb{Z} \cap H$.