Equations et inéquations

(Solutions)

Exercice n°1 :

Pour $x = \sqrt{2}$, on a :

* $2x^2 - 3x + 1 = 2 \times (\sqrt{2})^2 - 3 \times \sqrt{2} + 1$
$= 2 \times 2 - 3\sqrt{2} + 1$
$= 4 - 3\sqrt{2} + 1$
$= 5 - 3\sqrt{2}$

* $x^2 - 5x + 7 = (\sqrt{2})^2 - 5 \times \sqrt{2} + 7$
$= 2 - 5\sqrt{2} + 7$
$= 9 - 5\sqrt{2}$

On $5 - 3\sqrt{2} \neq 9 - 5\sqrt{2}$, donc $\sqrt{2}$ n'est pas une solution de cette équation.

Exercice n°2 : 1)

(a) Résolvons l'équation $3(x+2) = 2(2+x)$.

On a : $3(x+2) = 2(2+x)$

s.q : $3x + 6 = 4 + 2x$

s.q : $3x - 2x = 4 - 6$

s.q : $x = -2$

D'où la solution de cette équation est -2.

(b) Résolvons l'équation $x - 3\sqrt{2} = x + 2\sqrt{2}$.

On a : $x - 3\sqrt{2} = x + 2\sqrt{2}$

s.q : $x - x = 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2}$

s.q : $0x = 5\sqrt{2}$

s.q : $0 = 5\sqrt{2}$; ce qui impossible.

D'où cette équation n'a pas de solutions.

(c) Résolvons l'équation $\frac{x+1}{3} + 3 = \frac{3x+5}{2}$.

On a : $\frac{x+1}{3} + 3 = \frac{3x+5}{2}$

s.q: $\frac{2(x+1)}{6} + \frac{18}{6} = \frac{3(3x+5)}{6}$

s.q: $2(x+1) + 18 = 3(3x+5)$

s.q: $2x + 2 + 18 = 9x + 15$

s.q: $2x + 20 = 9x + 15$

s.q: $2x - 9x = 15 - 20$

s.q: $-7x = -5$

s.q: $x = \frac{-5}{-7} = \frac{5}{7}$

D'où la solution de cette équation est $\frac{5}{7}$.

(d) Résolvons l'équation $\sqrt{3}(x-1) + \sqrt{3}(x-\sqrt{2}) = \sqrt{12}x - \sqrt{8}$

On a: $\sqrt{3}(x-1) + \sqrt{3}(x-\sqrt{2}) = \sqrt{12}x - \sqrt{8}$

s.q: $\sqrt{3}x - \sqrt{3} + \sqrt{3}x - \sqrt{6} = 2\sqrt{3}x - 2\sqrt{2}$

s.q: $2\sqrt{3}x - \sqrt{3} - \sqrt{6} = 2\sqrt{3}x - 2\sqrt{2}$

s.q: $2\sqrt{3}x - 2\sqrt{3}x = \sqrt{3} + \sqrt{6} - 2\sqrt{2}$

s.q: $0x = \sqrt{3} + \sqrt{6} - 2\sqrt{2}$

s.q: $0 = \sqrt{3} + \sqrt{6} - 2\sqrt{2}$; ce qui impossible.

D'où cette équation n'a pas de solutions.

2] (a) Résolvons l'équation $(x+1)(x-3) = 0$.

On a: $(x+1)(x-3) = 0$

s.q: $x+1 = 0$ ou $x-3 = 0$

s.q: $x = -1$ ou $x = 3$

D'où les solutions de cette équation sont -1 et 3.

(b) Résolvons l'équation $(1+2x)(3x-\sqrt{2}) = 0$

On a: $(1+2x)(3x-\sqrt{2}) = 0$

s.q: $1+2x = 0$ ou $3x - \sqrt{2} = 0$

s.q: $2x = -1$ ou $3x = \sqrt{2}$

s.q: $x = -\frac{1}{2}$ ou $x = \frac{\sqrt{2}}{3}$

D'où les solutions de cette équation sont $-\frac{1}{2}$ et $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

(c) Résolvons l'équation $2x^2-3=0$.

* Méthode 1:

On a: $2x^2-3=0$

S.q: $(\sqrt{2}x)^2-\sqrt{3}^2=0$

S.q: $(\sqrt{2}x-\sqrt{3})(\sqrt{2}x+\sqrt{3})=0$

S.q: $\sqrt{2}x-\sqrt{3}=0$ ou $\sqrt{2}x+\sqrt{3}=0$

S.q: $\sqrt{2}x=\sqrt{3}$ ou $\sqrt{2}x=-\sqrt{3}$

S.q: $x=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ ou $x=\frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

D'où les solutions de cette équation sont $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ et $-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$.

* Méthode 2:

On a: $2x^2-3=0$

S.q: $2x^2=3$

S.q: $x^2=\frac{3}{2}$

S.q: $x=\sqrt{\frac{3}{2}}$ ou $x=-\sqrt{\frac{3}{2}}$

D'où les solutions de cette équation sont $\sqrt{\frac{3}{2}}$ et $-\sqrt{\frac{3}{2}}$

(d) Résolvons l'équation $x^2-4+(x-2)(1-\sqrt{3}x)=0$.

On a: $x^2-4+(x-2)(1-\sqrt{3}x)=0$

S.q: $x^2-2^2+(x-2)(1-\sqrt{3}x)=0$

S.q: $(x-2)(x+2)+(x-2)(1-\sqrt{3}x)=0$

S.q: $(x-2)\left[(x+2)+(1-\sqrt{3}x)\right]=0$

S.q: $(x-2)\left[(1-\sqrt{3})x+3\right]=0$

S.q: $x-2=0$ ou $(1-\sqrt{3})x+3=0$

S.q: $x=2$ ou $(1-\sqrt{3})x=-3$

S.q: $x=2$ ou $x=\frac{-3}{1-\sqrt{3}}$

D'où les solutions de cette équation sont 2 et $\frac{-3}{1-\sqrt{3}}$.

Exercice n°3 :

(1) Résolvons l'inéquation $x\sqrt{5}+3>2$.

On a : $x\sqrt{5}+3>2$

s.q : $x\sqrt{5}>2-3$

s.q : $x\sqrt{5}>-1$

s.q : $x>\frac{-1}{\sqrt{5}}$

D'où les solutions de cette inéquation sont les nombres réels supérieurs strictement à $\frac{-1}{\sqrt{5}}$.

(2) Résolvons l'inéquation $-2x+5\leqslant 0$.

On a : $-2x+5\leqslant 0$

s.q : $-2x\leqslant -5$

s.q : $x\geqslant \frac{-5}{-2}$

s.q : $x\geqslant \frac{5}{2}$

D'où les solution de cette inéquation sont les nombres réels supérieurs ou égaux ou $\frac{5}{2}$.

(3) Résolvons l'inéquation $4(x+3)-2(x+1)\geqslant 2x+10$.

On a : $4(x+3)-2(x+1)\geqslant 2x+10$

s.q : $4x+12-2x-2\geqslant 2x+10$

s.q : $2x+10\geqslant 2x+10$

s.q : $2x-2x\geqslant 10-10$

s.q : $0\geqslant 0$; ce qui vrai pour tout nombre réel x.

D'où les solutions de cette inéquation sont tous les nombres réels.

(4) Résolvons l'inéquation $-3(x-2)\leqslant 3x-\sqrt{6}$.

On a : $-3(x-2)\leqslant 3x-\sqrt{6}$

s.q : $-3x+6\leqslant 3x-\sqrt{6}$

s.q : $-3x-3x\leqslant -\sqrt{6}-6$

s.q : $-6x\leqslant -\sqrt{6}-6$

s.q: $x \geqslant \frac{-\sqrt{6}-6}{-6}$

s.q: $x \geqslant \frac{\sqrt{6}+6}{6}$

D'où les solutions de cette inéquation sont les nombres réels supérieurs ou égaux au $\frac{\sqrt{6}+6}{6}$.

(5) Résolvons l'inéquation $\frac{x+1}{3} - \frac{2x-1}{2} < x-1$.

On a: $\frac{x+1}{3} - \frac{2x-1}{2} < x-1$

s.q: $\frac{2(x+1)}{6} - \frac{3(2x-1)}{6} < \frac{6(x-1)}{6}$

s.q: $2(x+1) - 3(2x-1) < 6(x-1)$

s.q: $2x+2-6x+3 < 6x-6$

s.q: $-4x+5 < 6x-6$

s.q: $-4x-6x < -6-5$

s.q: $-10x < -11$

s.q: $x > \frac{-11}{-10}$

s.q: $x > \frac{11}{10}$

D'où les solutions de cette inéquation sont les nombres réels supérieurs strictement à $\frac{11}{10}$.

(6) Résolvons l'inéquation $x^2 - 2\sqrt{3}x + 3 \leqslant 0$.

On a: $x^2 - 2\sqrt{3}x + 3 \leqslant 0$

s.q: $x^2 - 2 \times x \times \sqrt{3} + \sqrt{3}^2 \leqslant 0$

s.q: $(x-\sqrt{3})^2 \leqslant 0$

s.q: $(x-\sqrt{3})^2 = 0$ (car $(x-\sqrt{3})^2 \geqslant 0$)

s.q: $x - \sqrt{3} = 0$

s.q: $x = \sqrt{3}$

D'où la solution de cette inéquation est $\sqrt{3}$.

Exercice n°4:

Soit x le premier nombre. Donc le deuxième nombre est $x+1$ et le troisième nombre est $x+2$.

La somme de ces nombres est égale 2025.

D'où: $x+(x+1)+(x+2)=2025$

s.q: $3x+3=2025$.

s.q: $3x=2025-3$

s.q: $3x=2022$

s.q: $x=\frac{2022}{3}=674$

Or on a: $674+675+676=2025$

D'où les nombres cherchés sont: 674; 675 et 676.

Exercice n°5:

(1) Résolvons l'équation $x^2+6x+9=0$.

On a: $x^2+6x+9=0$

s.q: $x^2+2\times x\times 3+3^2=0$

s.q: $(x+3)^2=0$

s.q: $x+3=0$

s.q: $x=-3$

D'où la solution de cette équation est -3.

(2) Résolvons l'équation $4x^2-20x+25=0$

on a: $4x^2-20x+25=0$

s.q: $(2x)^2-2\times 2x\times 5+5^2=0$

s.q: $(2x-5)^2=0$

s.q: $2x-5=0$

s.q: $2x=5$

s.q: $x=\frac{5}{2}$

D'où la solution de cette équation est $\frac{5}{2}$.

(3) Résolvons l'équation $x^2+6x+9=(3-2x)^2$

On a: $x^2+6x+9=(3-2x)^2$

S.q: $x^2+2\times x\times 3+3^2=(3-2x)^2$

S.q: $(x+3)^2=(3-2x)^2$

S.q: $(x+3)^2-(3-2x)^2=0$

S.q: $[(x+3)-(3-2x)][(x+3)+(3-2x)]=0$

S.q: $3x(6-x)=0$

S.q: $3x=0$ ou $6-x=0$

S.q: $x=0$ ou $x=6$

D'où les solutions de cette équation sont 0 et 6.

(4) Résolvons l'équation $x^2+2\sqrt{3}x+3=0$

On a: $x^2+2\sqrt{3}x+3=0$

S.q: $x^2+2\times x\times\sqrt{3}+\sqrt{3}^2=0$

S.q: $(x+\sqrt{3})^2=0$

S.q: $x+\sqrt{3}=0$

S.q: $x=-\sqrt{3}$

D'où la solution de cette équation est $-\sqrt{3}$.

(5) Résolvons l'équation $(3x-\sqrt{2})^2=2$.

On a: $(3x-\sqrt{2})^2=2$

S.q: $(3x-\sqrt{2})^2-\sqrt{2}^2=0$

S.q: $[(3x-\sqrt{2})+\sqrt{2}][(3x-\sqrt{2})-\sqrt{2}]=0$

S.q: $3x(3x-2\sqrt{2})=0$

S.q: $3x=0$ ou $3x-2\sqrt{2}=0$

S.q: $x=0$ ou $3x=2\sqrt{2}$

S.q: $x=0$ ou $x=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

D'où les solutions de cette équation sont 0 et $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

(6) Résolvons l'équation $x^2+x+\frac{1}{4}-(2x+1)(3-x)=0$.

On a: $x^2+x+\frac{1}{4}-(2x+1)(3-x)=0$

S.q: $\frac{1}{4}(4x^2+4x+1)-(2x+1)(3-x)=0$

S.q: $\frac{1}{4}((2x)^2+2\times 2x\times 1+1^2)-(2x+1)(3-x)=0$

S.q: $\frac{1}{4}(2x+1)^2-(2x+1)(3-x)=0$

S.q: $(2x+1)^2-4(2x+1)(3-x)=0$

S.q: $(2x+1)[(2x+1)-4(3-x)]=0$

S.q: $(2x+1)(2x+1-12+4x)=0$

S.q: $(2x+1)(6x-11)=0$

S.q: $2x+1=0$ ou $6x-11=0$

S.q: $2x=-1$ ou $6x=11$

S.q: $x=-\frac{1}{2}$ ou $x=\frac{11}{6}$

D'où les solutions de cette équation sont $-\frac{1}{2}$ et $\frac{11}{6}$.

Exercice n°6 :

1) * Résolvons l'inéquation $-3x+4>-2$.

On a: $-3x+4>-2$

S.q: $-3x>-2-4$

S.q: $-3x>-6$

S.q: $x>\frac{-6}{-3}$

S.q: $x<2$

D'où les solutions de cette inéquation sont les nombres réels inférieurs strictement à 2.

* Résolvons l'inéquation $4x-5\geqslant -3$.

On a: $4x-5\geqslant -3$

S.q: $4x\geqslant -3+5$

S.q: $4x\geqslant 2$

S.q: $x\geqslant \frac{2}{4}$

S.q: $x\geqslant \frac{1}{2}$

D'où les solutions de cette inéquation sont les nombres réels supérieurs ou égaux ou $\frac{1}{2}$.

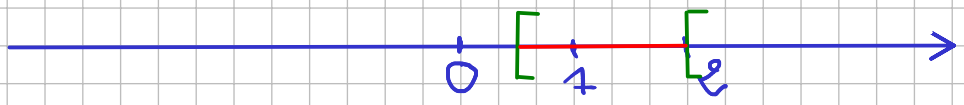
2) Déchisons les solutions du système $\begin{cases} -3x+4 > -2 \\ 4x-5 \geqslant -3 \end{cases}$.

D'après la question 1), $\begin{cases} -3x+4 > -2 \\ 4x-5 \geqslant -3 \end{cases}$ signifie que $\begin{cases} x < 2 \\ x \geqslant \frac{1}{2} \end{cases}$

signifie que $\frac{1}{2} \leqslant x < 2$.

D'où les solution de ce système sont les nombres réels compris entre $\frac{1}{2}$ et 2 et qui sont différents de 2.

Représentation des solutions:



Exercice 7:

Résolvons l'inéquation $x^2 - 9 > 2x - 6$.

On a: $x^2 - 9 > 2x - 6$

s.q: $x^2 - 3^2 > 2(x-3)$

s.q: $(x-3)(x+3) - 2(x-3) > 0$

s.q: $(x-3)[(x+3) - 2] > 0$

s.q: $(x-3)(x+1) > 0$

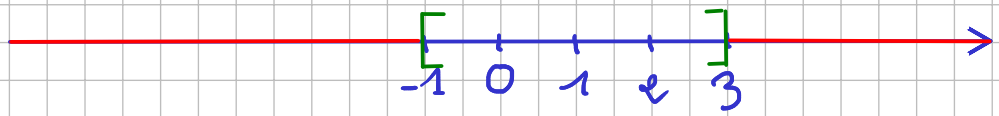
s.q: $x-3 > 0$ et $x+1 > 0$ ou $x-3 < 0$ et $x+1 < 0$

s.q: $x > 3$ et $x > 1$ ou $x < 3$ et $x < -1$

S.q: $x > 3$ ou $x < -1$

D'où les solutions de cette inéquation sont les nombres réels inférieurs strictement à -1 et les nombres réels supérieurs strictement à 3

Représentation des solutions.



Exercice n° 8 :

Soit x le premier nombre. Donc le deuxième nombre est $x+1$ et le troisième nombre est $x+2$.

La somme des carrés des ces nombres est égale à 974.

Donc : $x^2+(x+1)^2+(x+2)^2=974$

S.q : $x^2+x^2+2x+1+x^2+4x+4=974$

S.q : $3x^2+6x+5=974$

S.q : $3x^2+6x=969$

S.q : $x^2+2x=323$

S.q : $x^2+2x+1=324$

S.q : $(x+1)^2=324$

S.q : $x+1=\sqrt{324}$ (car x est un entier)

S.q : $x+1=18$

S.q : $x=18-1$

S.q : $x=17$

On a : $17^2+18^2+19^2=974$

D'où les nombres cherchés sont : 17, 18 et 19.

Exercice n° 9 :

(1) Résolvons l'équation $(x^2-5x+1)^2=(x^2+4x-1)^2$

On a : $(x^2-5x+1)^2=(x^2+4x-1)^2$

S.q : $(x^2-5x+1)^2-(x^2+4x-1)^2=0$

S.q : $\left[(x^2-5x+1)-(x^2+4x-1)\right]\left[(x^2-5x+1)+(x^2+4x-1)\right]=0$

S.q : $(-9x+2)(2x^2-x)=0$

S.q : $x(-9x+2)(2x-1)=0$

S.q : $x=0$ ou $-9x+2=0$ ou $2x-1=0$

S.q : $x=0$ ou $-9x=-2$ ou $2x=1$

S.q : $x=0$ ou $x=\frac{2}{9}$ ou $x=\frac{1}{2}$

D'où les solutions de cette équation sont : 0, $\frac{2}{9}$ et $\frac{1}{2}$.

(2) Résolvons l'équation $x^2-(\sqrt{2}+\sqrt{5})x+\sqrt{10}=0$.

On a: $x^2-(\sqrt{2}+\sqrt{5})x+\sqrt{10}=0$

S.q: $x^2-\sqrt{2}x-\sqrt{5}x+\sqrt{10}=0$

S.q: $x(x-\sqrt{2})-\sqrt{5}(x-\sqrt{2})=0$

S.q: $(x-\sqrt{2})(x-\sqrt{5})=0$

S.q: $x-\sqrt{2}=0$ ou $x-\sqrt{5}=0$

S.q: $x=\sqrt{2}$ ou $x=\sqrt{5}$

D'où les solutions de cette équation sont $\sqrt{2}$ et $\sqrt{5}$.

(3) Résolvons l'équation $x^2-x-1=0$.

On a: $x^2-x-1=0$

S.q: $x^2-x=1$

S.q: $x^2-2\times x\times\frac{1}{2}=1$

S.q: $x^2-2\times x\times\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2=1+\left(\frac{1}{2}\right)^2$

S.q: $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$

S.q: $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2=0$

S.q: $\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)-\frac{\sqrt{5}}{2}\right]\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{\sqrt{5}}{2}\right]=0$

S.q: $\left(x-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)=0$

S.q: $x-\frac{1+\sqrt{5}}{2}=0$ ou $x-\frac{1-\sqrt{5}}{2}=0$

S.q: $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ou $x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

D'où les solutions de cette équation sont $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

(4) Résolvons l'équation $x(x+1)=\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)$

On a: $x(x+1)=\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)$

S.q: $x^2+x=2+\sqrt{2}$

S.q: $x^2+2\times x\times\frac{1}{2}=2+\sqrt{2}$

S.q: $x^2+2\times x\times\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2=2+\sqrt{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2$

S.q: $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{9+4\sqrt{2}}{4}$

S.q: $x+\frac{1}{2}=\sqrt{\frac{9+4\sqrt{2}}{4}}$ ou $x+\frac{1}{2}=-\sqrt{\frac{9+4\sqrt{2}}{4}}$

S.q: $x=\frac{\sqrt{(2\sqrt{2}+1)^2}}{2}-\frac{1}{2}$ ou $x=-\frac{\sqrt{(2\sqrt{2}+1)^2}}{2}-\frac{1}{2}$

s.q: $x = \frac{2\sqrt{2}+1-1}{2}$ ou $x = \frac{-2\sqrt{2}-1-1}{2}$

s.q: $x = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2}-1$

D'où les solutions de cette équation sont $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}-1$.

Exercice n°10 (Challenge):

Déterminons le nombre réel positif t tel que: $t^2+t = 2t\sqrt{t}$.

on a: $t^2+t = 2t\sqrt{t}$

s.q: $t^2 - 2t\sqrt{t} + t = 0$

s.q: $t^2 - 2 \times t \times \sqrt{t} + \sqrt{t}^2 = 0$

s.q: $(t-\sqrt{t})^2 = 0$

s.q: $t - \sqrt{t} = 0$

s.q: $t = \sqrt{t}$

s.q: $t^2 = t$

s.q: $t^2 - t = 0$

s.q: $t(t-1) = 0$

s.q: $t = 0$ ou $t - 1 = 0$

s.q: $t = 0$ ou $t = 1$

D'où les valeurs possibles de t sont 0 et 1.