Fonctions linéaires et fonctions affines
(Solution de la série)

Exercice n°1

1) La fonction $f: x \longmapsto -3x$ est une fonction linéaire de coefficient -3.
Sa représentation graphique est une droite passant par l'origine du repère.

2) La fonction $g: x \longmapsto 7x-4$ est une fonction affine de coefficient 7 et -4 est son ordonné à l'origine.
Sa représentation graphique est une droite.

Exercice n°2

1) La nature de la fonction f.
La représentation graphique de la fonction f est une droite passant par l'origine du repère, donc f est une fonction linéaire.

2) Déterminons $f(0)$ et $f(-2)$.
D'après le graphe (D) de la fonction f, on a:

$$\boxed{f(0)=0} \quad \text{et} \quad \boxed{f(-2)=-1}$$

3) Déterminons le nombre dont l'image est 1 par la fonction f.
D'après le graphe (D) de la fonction f, le nombre dont l'image est 1 par la fonction f est 2.

4) Déterminons le coefficient de la fonction f.
D'après la question 2), on a: $f(-2)=-1$.
Donc le coefficient de la fonction f est: $a=\dfrac{f(-2)}{-2}=\dfrac{-1}{-2}=\dfrac{1}{2}$

Exercice n°3 (Régional 2024 - M.S)

1-(a) Déterminons graphiquement l'image de 2 par la fonction f.

D'après le graphe de la fonction f, on a: $\boxed{f(2)=3}$

(b) Déterminons graphiquement le nombre dont l'image est -3 par la fonction f.

D'après le graphe de la fonction f, le nombre dont l'image est -3 par la fonction f est -2.

(c) Montrons que $f(x)=\frac{3}{2}x$.

f est une fonction linéaire (car sa représentation graphique est une droite passant par l'origine du repère).

Donc: $f(x)=ax$

comme: $f(2)=3$ (D'après la question 1))

Alors: $a=\frac{f(2)}{2}=\frac{3}{2}$

D'où: $\boxed{f(x)=\frac{3}{2}x}$

2-(a) calculons g(0) et g(2).

on a: * $g(0)=3\times 0-1=0-1=-1$

* $g(2)=3\times 2-1=6-1=5$

D'où: $\boxed{g(0)=-1 \text{ et } g(2)=5}$

(b) Déterminons le nombre dont l'image est 0 par la fonction g.

Soit x le nombre dont l'image est 0 par la fonction g.

on a: $g(x)=0$

S.q: $3x-1=0$

S.q: $3x = 1$

S.q: $x = \frac{1}{3}$

D'où le nombre dont l'image est 0 par la fonction g est $\frac{1}{3}$.

(c) Vérifions que $g(3,2024) - g(2,2024) = 3$.

g est une fonction affine de coefficient 3, donc :

$$\frac{g(3,2024) - g(2,2024)}{3,2024 - 2,2024} = 3$$

S.q: $$\frac{g(3,2024) - g(2,2024)}{1} = 3$$

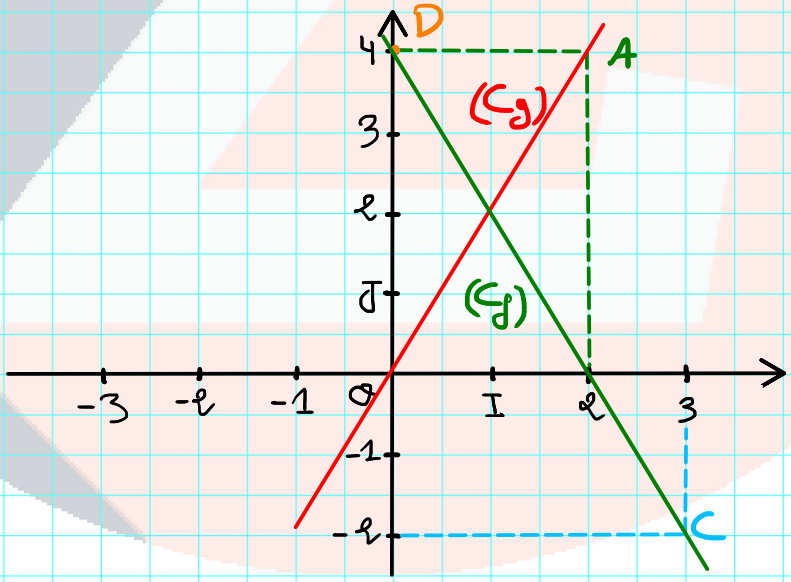
D'où: $\boxed{g(3,2024) - g(2,2024) = 3}$

Exercice n°4 (Régional 2024 - C.S)

1-(a) construction de la représentation graphique de la fonction g.

g est une fonction linéaire telle que $g(2) = 4$.

Donc sa courbe (C_g) est la droite passant par les points $O(0;0)$ et $A(2;4)$.



(b) Déterminons graphiquement l'image de 1 par la fonction g.

D'après la représentation graphique de la fonction g, on a:

$$\boxed{g(1) = 2}$$

(c) Déterminons l'expression de $g(x)$ en fonction de x.

g est une fonction linéaire, alors : $g(x) = ax$

Puisque $g(2) = 4$, alors : $a = \frac{g(2)}{2} = \frac{4}{2} = 2$

D'où : $\boxed{g(x) = 2x}$

2-(a) Déterminons l'image de 3 par la fonction f.

on a : $f(3) = -2 \times 3 + 4 = -6 + 4 = -2$

D'où : $\boxed{f(3) = -2}$

(b) Déterminons le nombre dont l'image est -2 par la fonction f.

Soit x le nombre dont l'image est -2 par la fonction f.

on a : $f(x) = -2$

S.q : $-2x + 4 = -2$

S.q : $-2x = -2 - 4$

S.q : $-2x = -6$

S.q : $x = \frac{-6}{-2} = 3$

D'où le nombre dont l'image est -2 par la fonction f est 3.

(c) Construction de la courbe de f dans le même repère.

x	3	0
$f(x)$	-2	4
	C	D

(car : $f(0) = -2 \times 0 + 4 = 0 + 4 = 0$)

Donc la courbe de f est la droite passant par les points $C(3;-2)$ et $D(0;4)$. (Voir la figure précédente).

Exercice n°5 (Régional 2022 - F.M)

1-(a) Déterminons l'image de 1 par la fonction f.

on a: $f(1) = 3 \times 1 = 3$

D'où: $\boxed{f(1) = 3}$

(b) Déterminons le nombre dont l'image est -5 par la fonction f.

Soit x le nombre dont l'image par la fonction f est -5.

on a: $f(x) = -5$

S.q: $3x = -5$

S.q: $x = \frac{-5}{3}$

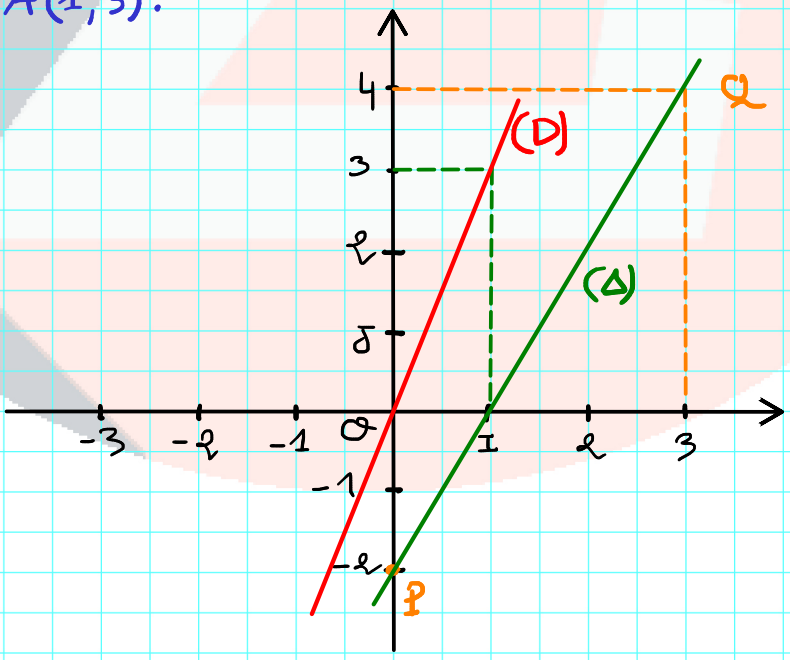
D'où le nombre dont l'image par la fonction f est -5 est le nombre $-\frac{5}{3}$.

(c) construction de (D), la courbe de la fonction f.

f est une fonction linéaire, et d'après la question 1-(a), on a:

$$f(1) = 3$$

Donc la courbe (D) est la droite passant par les points $O(0;0)$ et $A(1;3)$.



2-(a) Montrons que $g(x) = 2x - 2$.

La représentation graphique de la fonction g passant par les points $P(0;-2)$ et $Q(3;4)$.

Donc : $g(0) = -2$ et $g(3) = 4$

Comme g est une fonction affine, alors : $g(x) = ax + b$

on a : $a = \frac{g(0) - g(3)}{0 - 3} = \frac{-2-4}{0-3} = \frac{-6}{-3} = 2$

Donc : $g(x) = 2x + b$

or : $g(0) = -2$, alors : $2 \times 0 + b = -2$

s.q : $b = -2$

D'où : $\boxed{g(x) = 2x - 2}$

(b) Construction de (Δ), la courbe de la fonction g dans le même repère.

La courbe (Δ) est la droite passant par les points $P(0;-2)$ et $Q(3;4)$. (voir la figure précédente).

(c) Déterminons le nombre x qui a même image par les fonctions f et g.

Soit x le nombre qui a même image par les fonctions f et g.

on a : $f(x) = g(x)$

s.q : $3x = 2x - 2$

s.q : $3x - 2x = -2$

s.q : $x = -2$

D'où le nombre qui a même image par f et g est le nombre -2.

Exercice n°6

1) Montrons que f est une fonction linéaire.

Soit x un nombre réel.

On a: $3(x+4)+2f(x)=3(f(x)+4)$

S.q: $3x+12+2f(x)=3f(x)+12$

S.q: $2f(x)-3f(x)=-3x-12+12$

S.q: $-f(x)=-3x$

S.q: $f(x)=3x$

D'où f est une fonction linéaire.

2) Déterminons les nombres a et b sachant que les points $E(-3;a+2)$ et $F(b+1;\frac{b}{3})$ appartiennent à la représentation graphique de f.

* $E(-3;a+2)\in(C_f)$ S.q: $f(-3)=a+2$

S.q: $3\times(-3)=a+2$

S.q: $-9=a+2$

S.q: $a=-9-2=-11$

D'où: $\boxed{a=-11}$

* $F(b+1;\frac{b}{3})\in(C_f)$ S.q: $f(b+1)=\frac{b}{3}$

S.q: $3(b+1)=\frac{b}{3}$

S.q: $3b+3=\frac{b}{3}$

S.q: $3b-\frac{b}{3}=-3$

S.q: $\frac{9b-b}{3}=-3$

S.q: $\frac{8b}{3}=-3$

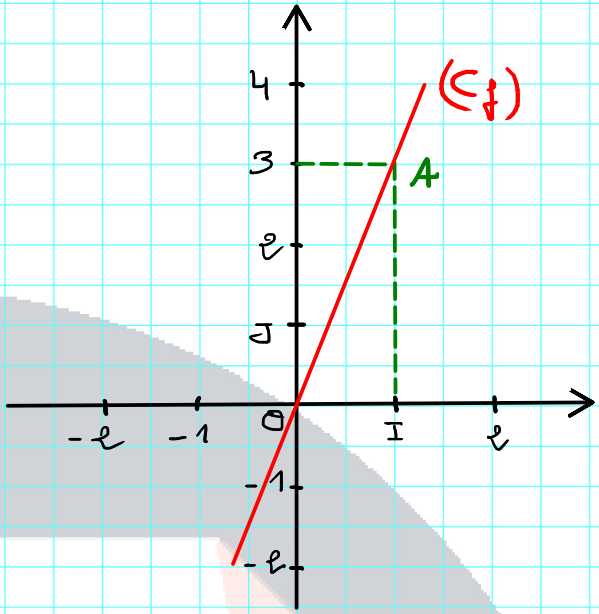
S.q: $b=\frac{-3}{\frac{8}{3}}=-3\times\frac{3}{8}=\frac{-9}{8}$

D'où: $\boxed{b=-\frac{9}{8}}$

3) construction de la courbe (C_f).

x	0	1
$f(x)$	0	3
	O	A

* $f(0) = 3 \times 0 = 0$
* $f(1) = 3 \times 1 = 3$



Exercice n°7

1-(a) Calculons $f(-1)$.

on a: $f(-1) = -5 \times (-1) = 5$

D'où: $\boxed{f(-1) = 5}$

(b) Calculons a sachant que la courbe (C_f) passe par le point $A(a-1; 2a)$.

on a: $A(a-1; 2a) \in (C_f)$

S.q: $f(a-1) = 2a$

S.q: $-5(a-1) = 2a$

S.q: $-5a + 5 = 2a$

S.q: $-5a - 2a = -5$

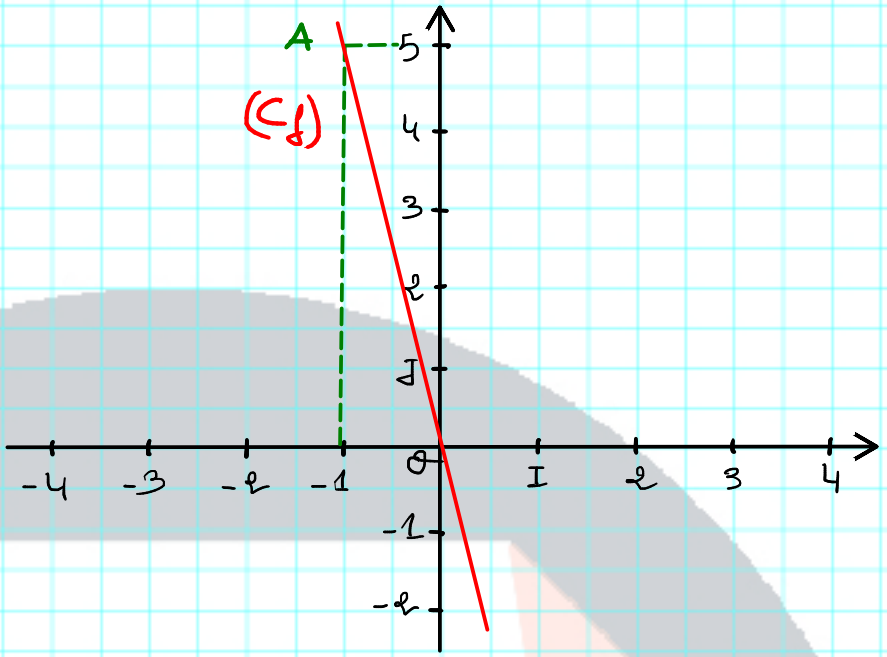
S.q: $-7a = -5$

S.q: $a = \frac{-5}{-7} = \frac{5}{7}$

D'où: $\boxed{a = \frac{5}{7}}$

(c) construction de la courbe (C_f).

x	0	-1
$f(x)$	0	5
	0	A



2) Déterminons la fonction affine g telle que $B(-2;0) \in (C_g)$ et $g(-4) - g(2) = -1$.

g est une fonction affine, donc : $g(x) = ax + b$

On a : $a = \dfrac{g(-4) - g(2)}{-4-2} = \dfrac{-1}{-6} = \dfrac{1}{6}$

Alors : $g(x) = \dfrac{1}{6}x + b$

Comme $B(-2;0) \in (C_g)$, alors : $g(-2) = 0$

S.q : $\dfrac{1}{6} \times (-2) + b = 0$

S.q : $-\dfrac{1}{3} + b = 0$

S.q : $b = \dfrac{1}{3}$

D'où : $\boxed{g(x) = \dfrac{1}{6}x + \dfrac{1}{3}}$

3) Résolvons algébriquement l'inéquation $2g(x) - 1 \leqslant f(x+2)$.

On a : $2g(x) - 1 \leqslant f(x+2)$

S.q : $2\left(\dfrac{1}{6}x + \dfrac{1}{3}\right) \leqslant -5(x+2)$

S.q : $\dfrac{1}{3}x + \dfrac{2}{3} \leqslant -5x - 10$

S.q : $\dfrac{1}{3}x + 5x \leqslant -10 - \dfrac{2}{3}$

S.q: $\frac{x+15x}{3} \leqslant \frac{-30-2}{3}$

S.q: $16x \leqslant -32$

S.q: $x \leqslant \frac{-32}{16}$

S.q: $x \leqslant -2$

D'où les solutions de cette inéquation sont tous les nombres réels inférieurs ou égaux a -2.

Exercice n°8

1) Les fonctions f et g sont-elles affines ?

Les fonctions f et g ne s'écrivent pas sous la forme $x \longmapsto ax+b$.

Donc elles ne sont pas des fonctions affines.

2-(a) Montrons que h est une fonction affine.

On a: $h(x) = f(x) - 2g(x)$

$= (4x-1)^2 - 2 - 2\left[4(2x^2+1)\right]$

$= 16x^2 - 8x + 1 - 2 - 2(8x^2+4)$

$= 16x^2 - 8x - 1 - 16x^2 - 8$

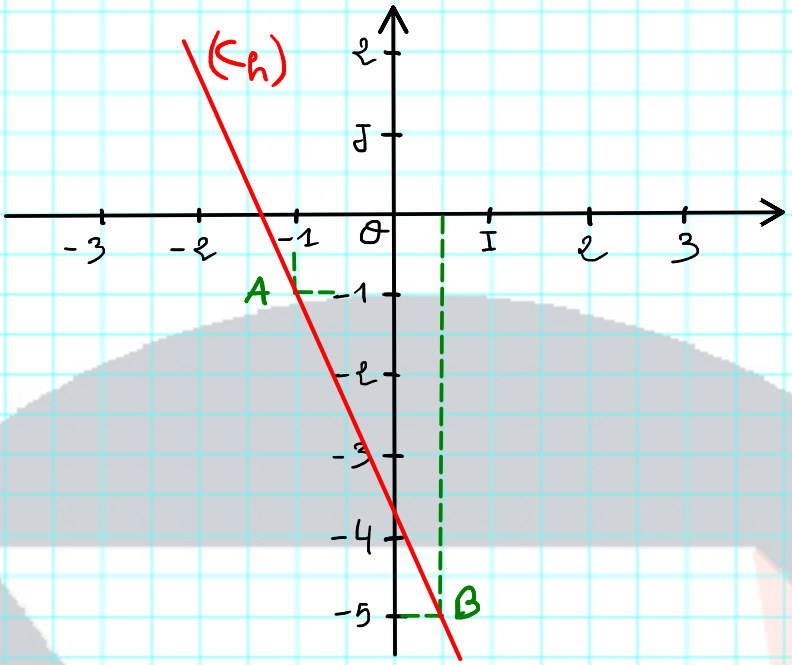
$= -8x - 9$

Donc: $h(x) = -8x - 9$ et par suite h est une fonction affine.

(b) Construction de la courbe (C_h).

x	-1	$-\frac{1}{2}$
$h(x)$	-1	-5
	A	B

* $h(-1) = -8\times(-1) - 9 = 8 - 9 = -1$
* $h(-\frac{1}{2}) = -8\times(-\frac{1}{2}) - 9 = 4 - 9 = -5$



Exercice n°9 (Challenge)

1) Montrons que $f(0)=0$.

pour tout x et y, on a: $f(x+y)=f(x)+f(y)$

En particulier, pour $x=y=0$, on a: $f(0+0)=f(0)+f(0)$

S.q: $f(0)=2f(0)$

S.q: $f(0)-2f(0)=0$

S.q: $-f(0)=0$

S.q: $f(0)=0$

D'où: $\boxed{f(0)=0}$

2) Montrons que $f(-x)=-f(x)$ pour tout nombre réel x.

Soit x un nombre réel.

on a: $f(x+(-x))=f(x)+f(-x)$

S.q: $f(x-x)=f(x)+f(-x)$

S.q: $f(0)=f(x)+f(-x)$

S.q: $0=f(x)+f(-x)$ (D'après la question 1))

2.q: $f(-x) = -f(x)$

D'où : $\boxed{f(-x) = -f(x) \text{ pour tout nombre réel } x}$

3) Calculons $f(20)$ sachant que $f(1) = 2$.

On a : $f(20) = f(1+19) = f(1) + f(19)$

$f(19) = f(1+18) = f(1) + f(18)$

$f(18) = f(1+17) = f(1) + f(17)$

$\vdots \qquad \vdots$

$f(3) = f(1+2) = f(1) + f(2)$

$f(2) = f(1+1) = f(1) + f(1)$

Additionnons membre à membre les membres de toutes ces égalités :

$f(20) + f(19) + f(18) + \dots + f(3) + f(2) = f(1) + f(19) + f(1) + f(18) + f(1) + f(17) + \dots + f(1) + f(2) + f(1) + f(1)$

c.à.d, $f(20) = \underbrace{f(1) + f(1) + f(1) + \dots + f(1)}_{20 \text{ fois}}$

$= 20 \times 2$ (car $f(1) = 2$)

$= 40$

D'où : $\boxed{f(20) = 40}$

4) Calculons $f(n)$ et $f(-n)$ en fonction de n.

On a : $f(n) = f(1+(n-1)) = f(1) + f(n-1)$

$f(n-1) = f(1+(n-2)) = f(1) + f(n-2)$

$\vdots \qquad \vdots$

$f(3) = f(1+2) = f(1) + f(2)$

$f(2) = f(1+1) = f(1) + f(1)$

Additionnons membre à membre les membres de toutes ces égalités :

$$f(n)+f(n-1)+\cdots+f(3)+f(2)=f(1)+f(n-1)+f(1)+f(n-2)+\cdots+f(1)+f(2)+f(1)+f(1)$$

c.à.d : $f(n)=\underbrace{f(1)+f(1)+\cdots+f(1)}_{n \text{ fois}}$

$=n\times f(1)$

$=an$ (car $f(1)=a$)

D'où : $\boxed{f(n)=an}$

D'après la question 1), on a : $f(-n)=-f(n)=-an$

Par suite : $\boxed{f(n)=an \text{ et } f(-n)=-an}$

Exercice n°10 (Challenge)

Déterminons toutes les fonctions affines f telles que :

$$(f(1))^2-(f(0))^2=0$$

f est une fonction affine, donc : $f(x)=ax+b$

On a : $f(1)=a\times 1+b=a+b$ et $f(0)=a\times 0+b=b$

Donc, on a : $(f(1))^2-(f(0))^2=0$

$$\text{S.q : } (a+b)^2-b^2=0$$

$$\text{S.q : } (a+b)^2=b^2$$

$$\text{S.q : } a+b=b \text{ ou } a+b=-b$$

$$\text{S.q : } a=0 \text{ ou } a=-2b$$

Donc : $f(x)=b$ ou $f(x)=-2bx+b$ où b est un nombre réel.

Exercice n°11 (Challenge)

Calculons $g(x+f(y))$.

Soient x et y deux nombres réels.

On a: $f(x+g(y)) = 2x+y+5$ (*)

Pour $y=0$, on trouve: $f(x+g(0)) = 2x+5$

Posons $t = x+g(0)$, alors $x = t-g(0)$ et donc:

$$f(t) = 2(t-g(0))+5 = 2t-2g(0)+5$$

Ainsi, on peut écrire: $f(x) = 2x+b$

Dans l'égalité (*) remplaçons f, on obtient:

$$2(x+g(y))+b = 2x+y+5$$

c.à.d: $2x+2g(y)+b = 2x+y+5$

c.à.d: $2g(y) = 2x+y+5-2x-b$

c.à.d: $2g(y) = y-b+5$

c.à.d: $g(y) = \frac{1}{2}y - \frac{b-5}{2}$

Calculons maintenant $g(x+f(y))$.

On a: $f(y) = 2y+b$, donc:

$$g(x+f(y)) = \frac{1}{2}(x+2y+b) - \frac{b-5}{2}$$

$$= \frac{1}{2}x + y + \frac{b}{2} - \frac{b-5}{2}$$

$$= \frac{1}{2}x + y + \frac{5}{2}$$

(car: $\frac{b}{2} - \frac{b-5}{2} = \frac{5}{2}$)

Par suite: $\boxed{g(x+f(y)) = \frac{1}{2}x + y + \frac{5}{2}}$

Exercice n°12 (Challenge)

Calculons $f(x)$ en fonction de x.

Soit x un nombre réel.

On a: $2f(x)+3f(1-x)=15-5x$

Remplaçons x par $1-x$, on obtient:

$$2f(1-x)+3f(1-(1-x))=15-5(1-x)$$

c.à.d: $2f(1-x)+3f(x)=10+5x$

On a donc le système: $\begin{cases} 2f(x)+3f(1-x)=15-5x & (1) \\ 3f(x)+2f(1-x)=10+5x & (2) \end{cases}$

Multiplions l'équation (1) par 3 et l'équation (2) par -2:

$$\begin{cases} 6f(x)+9f(1-x)=45-15x \\ -6f(x)-4f(1-x)=-20-10x \end{cases}$$

Additionnons membre à membre les membres des deux équations:

$$6f(x)+9f(1-x)-6f(x)-4f(1-x)=45-15x-20-10x$$

S.q: $5f(1-x)=25-25x$

S.q: $f(1-x)=\frac{25-25x}{5}=5-5x$

Remplaçons x par $1-x$, on obtient:

$$f(1-(1-x))=5-5(1-x)$$

c.à.d: $f(x)=5x-5+5=5x$

D'où: $\boxed{f(x)=5x}$