Notions de logique

(Correction de la série n°1)

Exercice n°1

* La proposition (P et Q) est vraie si et seulement si P et vraie et Q est vraie.
On la proposition "$\sqrt{9} = -3$" est fausse, alors P_1 est fausse.

* La proposition (P ou Q) est fausse seulement dans le cas où P et Q sont fausses en même temps, et vraie dans tous les autres cas.
comme la proposition "$\sqrt{3} + \sqrt{7} > 3$" est vraie, alors P_2 est vraie.

* La proposition P_3 est équivalente à :
$$P_3 : (\forall a \in \mathbb{N})\ (a \text{ n'est pas premier ou } a \text{ est impair})$$
sa négation est :
$$\overline{P_3} : (\exists a \in \mathbb{N})\ (a \text{ est premier et } a \text{ est pair})$$
La proposition $\overline{P_3}$ est vraie, car par exemple pour $a = 2$, on a 2 est premier et 2 est pair.
Donc $\overline{P_3}$ est vraie et par suite P_3 est fausse.

* La proposition P_4 est équivalente à :
$$P_4 : (\forall x \in \mathbb{R})\ (x \geq -1 \text{ ou } x < 0)$$
sa négation est : $\overline{P_4} : (\exists x \in \mathbb{R})\ (x < -1 \text{ et } x \geq 0)$
La proposition $\overline{P_4}$ est fausse, car il n'existe aucun nombre réel x qui vérifié $x < -1$ et $x \geq 0$.
D'où P_4 est vraie.

* La négation de la proposition P_5 est :

$$\overline{P_5} : (\forall x \in \mathbb{R});\ x^2 + x + 1 \neq 0$$

Le discriminant du polynôme $x^2 + x + 1$ est :

$$\Delta = 1^2 - 4 \times 2 \times 1 = 1 - 8 = -7 < 0$$

Donc l'équation $x^2 + x + 1 = 0$ n'admet pas des solutions dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire $\overline{P_5}$ est vraie.

D'où P_5 est fausse.

* Soit $a > 1$. On a :

$$\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1} = 2 \iff \sqrt{a} + 1 = 2(\sqrt{a} - 1)$$
$$\iff \sqrt{a} + 1 = 2\sqrt{a} - 2$$
$$\iff 3 = \sqrt{a}$$
$$\iff a = 9$$

D'où la proposition P_6 est vraie.

Exercice n°2

* $P_1 : (\forall r \in \mathbb{Q})(\exists p \in \mathbb{Z})(\exists q \in \mathbb{N}^*);\ r = \frac{p}{q}$
* $P_2 : (\exists a \in \mathbb{N})(\forall b \in \mathbb{N});\ a \leqslant b$
* $P_3 : (\forall x \in \mathbb{R})(\exists! p \in \mathbb{Z});\ p \leqslant x < p+1$
* $P_4 : (\forall x \in \mathbb{R});\ f(x) \neq 0$
* $P_5 : (\exists a \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R});\ f(x) = f(a)$

Exercice n°3

* La proposition P_1 est équivalente à :

$$P_1 : (\exists x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R});\ \left[x \geqslant y \text{ ou } \left((\forall a \in \mathbb{R});\ a > x \text{ et } a < y\right)\right]$$

Sa négation est :

$$\overline{P_1} : (\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R});\ \left[x < y \text{ et } \left((\exists a \in \mathbb{R});\ a \leqslant x \text{ ou } a \geqslant y\right)\right]$$

La proposition P_1 est vraie. En effet, si x et y sont deux nombres réels tels que $x<y$. on prend $a=\frac{x+y}{2}$.
Alors, on a: $x<\frac{x+y}{2}<y$.

* La proposition P_2 est équivalente à :

$$P_2 : (\forall x\in\mathbb{R});\ (x^2\notin\mathbb{Z} \text{ ou } x\in\mathbb{Z})$$

Sa négation est :

$$\overline{P_2}: (\exists x\in\mathbb{R});\ (x^2\in\mathbb{Z} \text{ et } x\notin\mathbb{Z})$$

La proposition $\overline{P_2}$ est vraie. On prend par exemple $x=\sqrt{2}$.
on a: $\sqrt{2}^2=2\in\mathbb{Z}$, mais $\sqrt{2}\notin\mathbb{Z}$.
D'où la proposition P_2 est fausse.

* La négation de la proposition P_3 est :

$$\overline{P_3}: (\exists x\in\mathbb{R})(\forall y\in\mathbb{R});\ y^2-xy-1=0$$

La proposition P_3 est vraie. En effet, soit $x\in\mathbb{R}$ et on considère l'équation d'inconnue y suivante :

$$(E): y^2-xy-1=0$$

Son discriminant est: $\Delta=(-x)^2-4\times1\times(-1)$

$$=x^2+4$$

$$>0$$

Donc l'équation (E) possède toujours des solutions dans $\mathbb{R}$.
Ainsi, P_3 est vraie.

* La négation de la proposition P_4 est :

$$\overline{P_4}: (\forall p\in\mathbb{R});\ \frac{8}{p+4}\notin\mathbb{N}$$

La proposition $\overline{P_4}$ est fausse, car si on prend $p=0$, on

obtient : $\frac{8}{0+4} = \frac{8}{4} = 2 \in \mathbb{N}$. D'où $\bar{P}_4$ est fausse et par suite P_4 est vraie.

Exercice n°4

1) Montrons que : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; \sqrt{x^2+1} + x \geq 0$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On distingue deux cas :

* 1er cas : Si $x \geq 0$, alors $x^2+1 > 0$ et $x \geq 0$.

Donc : $\sqrt{x^2+1} + x > 0$.

* 2ème cas : Si $x < 0$, alors $-x > 0$.

On a, on a : $\rightarrow \sqrt{x^2+1}^2 = x^2+1$

$\rightarrow (-x)^2 = x^2$

Donc : $\sqrt{x^2+1}^2 > (-x)^2$

et puisque $\sqrt{x^2+1}$ et $-x$ sont positifs, alors :

$$\sqrt{x^2+1} > -x$$

et donc : $\sqrt{x^2+1} + x > 0$

D'où : $\boxed{(\forall x \in \mathbb{R}) ; \sqrt{x^2+1} + x > 0}$

2) Déduisons que : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; \sqrt{x^2-2x+2} - x + 1 > 0$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$x^2 - 2x + 2 = x^2 - 2x + 1 + 1$$
$$= (x-1)^2 + 1$$
$$= (1-x)^2 + 1$$

Alors : $\sqrt{x^2-2x+2} - x + 1 = \sqrt{(1-x)^2+1} + (1-x)$

$= \sqrt{t^2+1} + t$ où $t = 1-x$

D'après la question 1), on a : $\sqrt{t^2+1} + t > 0$

D'où : $\sqrt{x^2-2x+2}-x+1>0$

par suite : $\boxed{(\forall x\in\mathbb{R});\sqrt{x^2-2x+2}-x+1>0}$

Exercice n°5

1) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation : $(E): 2x^2-|x-3|-18=0$

Soit $x\in\mathbb{R}$.

* 1er cas : si $x\geqslant 3$, alors $x-3\geqslant 0$ et donc $|x-3|=x-3$.

D'où : $(E)\Leftrightarrow 2x^2-(x-3)-18=0$

$\Leftrightarrow 2x^2-x-15=0$

Son discriminant est : $\Delta=(-1)^2-4\times 2\times(-15)$

$=121$

>0

Donc cette équation admet deux solutions :

→ $x_1=\dfrac{-(-1)-\sqrt{121}}{2\times 2}=\dfrac{-10}{4}=-\dfrac{5}{2}$

→ $x_2=\dfrac{-(-1)+\sqrt{121}}{2\times 2}=\dfrac{12}{4}=3$

Puisque $x\geqslant 3$, alors : $S_{E_1}=\{3\}$.

* 2ème cas : si $x<3$, alors $x-3<0$ et donc : $|x-3|=3-x$.

D'où : $(E)\Leftrightarrow 2x^2-(3-x)-18=0$

$\Leftrightarrow 2x^2+x-21=0$

Son discriminant est : $\Delta=1^2-4\times 2\times(-21)$

$=169$

>0

Donc cette équation admet deux solutions :

$$\rightarrow x_1 = \frac{-1-\sqrt{169}}{2\times 2} = \frac{-14}{4} = \frac{-7}{2}$$

$$\rightarrow x_2 = \frac{-1+\sqrt{169}}{2\times 2} = \frac{12}{4} = 3$$

comme $x<3$, donc: $S_E = \left\{-\frac{7}{2}\right\}$

D'où: $S_E = S_{E_1} \cup S_{E_2} = \left\{-\frac{7}{2}; 3\right\}$.

Par suite: $\boxed{S_E = \left\{-\frac{7}{2}; 3\right\}}$

2) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation: (I): $\sqrt{x^2+2x-3} > x+2$

Déterminons tout d'abord D_I l'ensemble de définition de l'inéquation (I).

Soit $x\in\mathbb{R}$. on a: $x\in D_I \iff x^2+2x-3 \geqslant 0$.

Résolvons cette inéquation.

Le discriminant du trinôme x^2+2x-3 est:

$$\Delta = 2^2 - 4\times 1\times(-3) = 16 > 0$$

Donc le trinôme x^2+2x-3 admet deux racines:

$$\rightarrow x_1 = \frac{-2-\sqrt{16}}{2\times 1} = \frac{-6}{2} = -3$$

$$\rightarrow x_2 = \frac{-2+\sqrt{16}}{2\times 1} = \frac{2}{2} = 1$$

D'où le tableau de signe de x^2+2x-3:

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
x^2+2x-3		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc l'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2+2x-3 \geqslant 0$ est: $S =]-\infty;-3] \cup [1;+\infty[$

Donc l'ensemble de définition de l'inéquation (I) est: $D_I =]-\infty;-3] \cup [1;+\infty[$.

Soit $x \in D_I$. On distingue deux cas:

* si $x+2 \geqslant 0$, alors $x \geqslant -2$ et puisque $x \in D_I$, on a donc $x \in [1;+\infty[$.

Alors: $(I) \Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2+2x-3}\right)^2 > (x+2)^2$

$\Leftrightarrow x^2+2x-3 > x^2+4x+4$

$\Leftrightarrow -2x > 7$

$\Leftrightarrow x < -\frac{7}{2}$

or $x \geqslant 1$, donc l'inéquation (I) n'a pas de solution dans ce cas.

* si $x+2 < 0$, alors $x < -2$ et puisque $x \in D_I$, on trouve que $x \in]-\infty;-3]$.

comme $\sqrt{x^2+2x-3} \geqslant 0$ et que $x+2 < 0$, alors:

$(\forall x \in]-\infty;-3]);\ \sqrt{x^2+2x-3} > x+2$

Par suite: $\boxed{S_I =]-\infty;-3]}$

3) Montrons que: $(\forall x \in \mathbb{R});\ x^4-x^3+2 > 0$

Soit $x \in \mathbb{R}$. on a: $x^4-x^3+2 = x^3(x-1)+2$.

on distingue donc trois cas:

* si $x < 0$, alors $x^3 < 0$ et $x-1 < -1$.

Donc: $x^3(x-1) > 0$

c.à.d: $x^3(x-1)+2 > 2 > 0$

D'où : $x^4 - x^3 + 2 > 0$.

* Si $0 < x < 1$, alors $0 < x^3 < 1$ et $-1 < x-1 < 0$.

c.à.d : $0 < x^3 < 1$ et $0 < -(x-1) < 1$

Donc : $0 < -x^3(x-1) < 1$

c.à.d : $-1 < x^3(x-1) < 0$

c.à.d : $1 < x^3(x-1) + 2 < 2$

D'où : $x^4 - x^3 + 2 > 1 > 0$

Par suite : $x^4 - x^3 + 2 > 0$.

* Si $x > 1$, alors $x^3 > 1$ et $x - 1 > 0$.

Donc : $x^3(x-1) > 0$

c.à.d : $x^3(x-1) + 2 > 2 > 0$

D'où : $x^4 - x^3 + 2 > 0$

Dans tous les cas, on a : $x^4 - x^3 + 2 > 0$.

par conséquent : $\boxed{(\forall x \in \mathbb{R});\ x^4 - x^3 + 2 > 0}$

Exercice n°6

1) Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N});\ (n^2 \text{ pair} \Rightarrow n \text{ pair})$

Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant le raisonnement par contraposée, montrons que : n impair $\Rightarrow n^2$ impair

Supposons que n est impair, alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k+1$. Donc : $n^2 = (2k+1)^2$

$$= 4k^2 + 2k + 1$$
$$= 2(2k^2 + k) + 1$$
$$= 2k' + 1 \text{ où } k' = 2k^2 + k$$

comme $k' \in \mathbb{N}$, car $k \in \mathbb{N}$, alors n^2 est impair.

D'où: $(\forall n \in \mathbb{N})$; ($n^2$ pair $\Rightarrow$ n pair)

2) Montrons que: $(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2)$; $x \neq y \Rightarrow (x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1)$

Soient $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. on procède par contraposée, supposons que $(x+1)(y-1) = (x-1)(y+1)$ et montrons que $x = y$.

On a: $(x+1)(y-1) = (x-1)(y+1) \Rightarrow xy - x + y - 1 = xy + x - y - 1$

$\Rightarrow -x + y = x - y$

$\Rightarrow -x - x = -y - y$

$\Rightarrow -2x = -2y$

$\Rightarrow x = y$

D'où: $(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2)$; $x \neq y \Rightarrow (x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1)$

3) Montrons que: $(\forall \varepsilon > 0 : |a| < \varepsilon) \Rightarrow a = 0$

Par contraposée, supposons que $a \neq 0$ et montrons que:

$(\exists \varepsilon > 0)$; $|a| \geq \varepsilon$

On a: $a \neq 0$, on prend donc $\varepsilon = \frac{|a|}{2}$. Alors $|a| \geq \varepsilon$.

D'où $(\exists \varepsilon > 0)$; $|a| \geq \varepsilon$.

Par suite: $(\forall \varepsilon > 0 : |a| < \varepsilon) \Rightarrow a = 0$

Exercice n°7

1) Montrons que: $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$

On pose: $A = a^2 + b^2 + c^2 - (ab + bc + ac)$

Montrons que $A \geq 0$.

On a: $2A = 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ac$

$= (a^2 - 2ab + b^2) + (b^2 - 2bc + c^2) + (c^2 - 2ac + a^2)$

$$= (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$$

Donc : $A = \frac{1}{2}\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right] \geqslant 0$

D'où : $A \geqslant 0$ et par suite : $\boxed{a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ac}$

2) Montrons que : $a^3+b = b^3+a \Leftrightarrow a=b$

Montrons les deux implications.

($\Leftarrow$) Supposons que $a=b$ et montrons que $a^3+b = b^3+a$.

on a : $a=b \Rightarrow a^3 = b^3$

$\Rightarrow a^3+b = b^3+a$ (car : $a=b$)

D'où : $a=b \Rightarrow a^3+b = b^3+a$

($\Rightarrow$) Supposons que $a^3+b = b^3+a$ et montrons que $a=b$.

on a : $a^3+b = b^3+a \Rightarrow a^3-b^3-(a-b) = 0$

$\Rightarrow (a-b)(a^2+ab+b^2) - (a-b) = 0$

$\Rightarrow (a-b)\left[a^2+ab+b^2-1\right] = 0$

car : $a^2+ab+b^2-1 = \left(a-\frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4} + b^2 - 1$

$= \left(a-\frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3b^2}{4} + 1 \geqslant 1 > 0$

Donc : $a^2+ab+b^2-1 \neq 0$ et par suite : $a-b=0$

c'est-à-dire $a=b$.

D'où : $a^3+b = b^3+a \Rightarrow a=b$

Conclusion : $\boxed{a^3+b = b^3+a \Leftrightarrow a=b}$

Exercice n°8

1) Montrons que : $\frac{\sqrt{x}}{x^2-x+1} \leqslant \frac{4}{3}\sqrt{x}$

On a: $\frac{\sqrt{x}}{x^2-x+1} - \frac{4}{3}\sqrt{x} = \frac{3\sqrt{x} - 4\sqrt{x}(x^2-x+1)}{3(x^2-x+1)}$

$= \frac{3\sqrt{x} - 4x^2\sqrt{x} + 4x\sqrt{x} - 4\sqrt{x}}{3(x^2-x+1)}$

$= -\frac{\sqrt{x}}{3} \times \frac{4x^2+4x-1}{x^2-x+1}$

$= -\frac{\sqrt{x}}{3} \times \frac{(2x-1)^2}{x^2-x+1}$

Le discriminant de x^2-x+1 est: $\Delta = (-1)^2 - 4\times1\times1 = -3 < 0$

Donc $x^2-x+1 > 0$.

D'où: le nombre $-\frac{\sqrt{x}}{3} \times \frac{(2x-1)^2}{x^2-x+1}$ est négatif.

Par suite: $\boxed{\frac{\sqrt{x}}{x^2-x+1} \leqslant \frac{4}{3}\sqrt{x}}$

2) Montrons que: $\sqrt{2x+2} - \sqrt{x} = 1 \iff x = 1$

On a: $\sqrt{2x+2} - \sqrt{x} = 1 \iff (\sqrt{2x+2} - \sqrt{x})^2 = 1^2$

$\iff 2x+2 - 2\sqrt{2x+2}\times\sqrt{x} + x = 1$

$\iff -2\sqrt{2x(x+1)} = -3x-1$

$\iff (-2\sqrt{2x(x+1)})^2 = (-3x-1)^2$

$\iff 4(2x(x+1)) = 9x^2+6x+1$

$\iff 8x^2+4x = 9x^2+6x+1$

$\iff -x^2-2x+1 = 0$

$\iff (x-1)^2 = 0$

$\iff x-1 = 0$

$\iff x = 1$

D'où: $\boxed{\sqrt{2x+2} - \sqrt{x} = 1 \iff x = 1}$

Exercice n°9

Montrons que : $(\forall (a,b)\in]-1,1[^2)\ ;\ -1 < \dfrac{a+b}{1+ab} < 1$

Soient a et b dans $]-1,1[$.

On a : $\begin{cases} -1<a<1 \\ -1<b<1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |a|<1 \\ |b|<1 \end{cases} \Rightarrow |ab|<1 \Rightarrow -1<ab<1 \Rightarrow 0<1+ab<2$

Donc le dénominateur $1+ab$ est strictement positif.

* Montrons que : $\dfrac{a+b}{1+ab} < 1$

On a : $1-\dfrac{a+b}{1+ab} = \dfrac{1+ab-a-b}{1+ab} = \dfrac{1-b-a(1-b)}{1+ab} = \dfrac{(1-a)(1-b)}{1+ab}$

On a $a<1$ et $b<1$, alors $1-a>0$ et $1-b>0$ et comme $1+ab>0$

donc : $1-\dfrac{a+b}{1+ab}>0$. D'où $\boxed{\dfrac{a+b}{1+ab}<1}$ (1)

* Montrons que : $\dfrac{a+b}{1+ab} > -1$

On a : $\dfrac{a+b}{1+ab}+1 = \dfrac{a+b+ab+1}{1+ab} = \dfrac{(1+a)(1+b)}{1+ab}$

On a $a>-1$ et $b>-1$, alors $1+a>0$ et $1+b>0$ et puis que $1+ab>0$, donc $\dfrac{a+b}{1+ab}+1>0$. D'où : $\boxed{\dfrac{a+b}{1+ab}>-1}$ (2)

De (1) et (2), on obtient : $\boxed{-1<\dfrac{a+b}{1+ab}<1}$

Exercice n°10

1) Montrons que : $(\forall x\in\mathbb{R}_+^*)\ ;\ x+\dfrac{1}{x}\geqslant 2$.

Soit $x\in\mathbb{R}_+^*$. On a : $x+\dfrac{1}{x}-2 = \dfrac{x^2-2x+1}{x} = \dfrac{(x-1)^2}{x} \geqslant 0$

D'où : $\boxed{(\forall x\in\mathbb{R}_+^*)\ ;\ x+\dfrac{1}{x}\geqslant 2}$

2) Déduisons que : $(\forall (a,b,c)\in(\mathbb{R}_+^*)^3)$; $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geqslant 9$

Soient a, b et c dans $\mathbb{R}_+^*$.

On a : $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=1+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+1+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+1$

$=3+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)$

On pose $x=\frac{a}{b}$, $y=\frac{a}{c}$ et $z=\frac{b}{c}$.

Alors : $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=3+\left(x+\frac{1}{x}\right)+\left(y+\frac{1}{y}\right)+\left(z+\frac{1}{z}\right)$

Or d'après la question 1), on a :

$x+\frac{1}{x}\geqslant 2$; $y+\frac{1}{y}\geqslant 2$ et $z+\frac{1}{z}\geqslant 2$

D'où : $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geqslant 3+2+2+2=9$

Par suite : $\boxed{(\forall (a,b,c)\in(\mathbb{R}_+^*)^3)\ ;\ (a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geqslant 9}$

Exercice n°11

1) Montrons que : $(\forall (a,b)\in\mathbb{R}^2)$; $a^2+b^2=0 \Rightarrow a=b=0$

Soient a et b dans $\mathbb{R}$. Supposons que $a^2+b^2=0$ et montrons que $a=b=0$. Supposons par l'absurde que $a\neq 0$ ou $b\neq 0$.

si $a\neq 0$, alors $a^2>0$ et donc $a^2+b^2>0$ ce qui absurde car $a^2+b^2=0$. De même pour b. D'où nécessairement $a=b=0$. Par suite : $\boxed{(\forall (a,b)\in\mathbb{R}^2)\ ;\ a^2+b^2=0 \Rightarrow a=b=0}$

2) Montrons que : $x+y+2=2\sqrt{x}+2\sqrt{y} \Rightarrow x=y=1$

Supposons que : $x+y+2=2\sqrt{x}+2\sqrt{y}$ et montrons que $x=y=1$.

On a : $x+y+2=2\sqrt{x}+2\sqrt{y} \Rightarrow (x-2\sqrt{x}+1)+(y-2\sqrt{y}+1)=0$

$\Rightarrow (\sqrt{x}-1)^2+(\sqrt{y}-1)^2=0$

$\Rightarrow \sqrt{x}-1=\sqrt{y}-1=0$ (D'après 1))

$$\Rightarrow x=y=1$$

D'où : $\boxed{x+y+2=2\sqrt{x}+2\sqrt{y} \Rightarrow x=y=1}$

Exercice n°12

Montrons que : $|a+b| \leqslant \sqrt{2}$

on sait que : $(a-b)^2 \geqslant 0$ c.à.d : $a^2-2ab+b^2 \geqslant 0$

c.à.d : $1-2ab \geqslant 0$ (car : $a^2+b^2=1$)

c.à.d : $ab \leqslant \frac{1}{2}$

c.à.d : $2ab \leqslant 1$

c.à.d : $1+2ab \leqslant 2$

c.à.d : $a^2+b^2+2ab \leqslant 2$ (car : $a^2+b^2=1$)

c.à.d : $(a+b)^2 \leqslant 2$

c.à.d : $|a+b| \leqslant \sqrt{2}$

D'où : $\boxed{|a+b| \leqslant \sqrt{2}}$

Exercice n°13

Montrons que le système (S) : $\begin{cases} 2x-3z>3 \\ 3y-2x \geqslant 3 \\ y-z \leqslant 2 \end{cases}$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}^3$.

Supposons par l'absurde que le système (S) admet une solution $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

En additionnant la première et la deuxième inéquation :

$$2x-3z+3y-2x>3+3$$

c.à.d : $3y-3z>6$

Ce qui nous donne $y-z>2$, c'est une contradiction, car

dans la troisième inéquation, on a $y - z \leq 2$.

D'où le système (S) n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice n°14

1) Montrons que $\sqrt{6} \notin \mathbb{Q}$.

Supposons par l'absurde que $\sqrt{6} \in \mathbb{Q}$. Alors il existe p et q dans $\mathbb{N}^*$ avec $p \wedge q = 1$ tels que $\sqrt{6} = \frac{p}{q}$.

Donc $6 = \frac{p^2}{q^2}$, c'est-à-dire $p^2 = 6q^2$ (*)

Alors p^2 est un multiple de 6, et donc p est un multiple de 6.

D'où, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $p = 6k$.

Remplaçons p par 6k dans l'égalité (*), on trouve :

$$(6k)^2 = 6q^2 \text{ c.à.d: } q^2 = 6k^2$$

Donc q^2 est un multiple de 6 et donc q est aussi.

on a trouvé alors que p et q sont des multiples de 6 ce qui absurde car $p \wedge q = 1$. D'où $\boxed{\sqrt{6} \notin \mathbb{Q}}$

2) Déduisons que $\sqrt{2} + \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

Supposons par l'absurde que $\sqrt{2} + \sqrt{3} \in \mathbb{Q}$.

Alors $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 \in \mathbb{Q}$ et puisque :

$$(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = 2 + 2\sqrt{6} + 3 = 5 + 2\sqrt{6}$$

Donc $5 + 2\sqrt{6} \in \mathbb{Q}$, ce qui implique $\sqrt{6} \in \mathbb{Q}$. Impossible, car d'après la question 1), on a montré que $\sqrt{6} \notin \mathbb{Q}$.

D'où : $\boxed{\sqrt{2} + \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}}$

Exercice n°15

1) Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ; 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n+1) = (n+1)^2$

On pose $S_n = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n+1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On procède par récurrence sur n.

* Pour $n=0$, on a: $S_0 = 1$ et $(0+1)^2 = 1^2 = 1$

  Alors $S_1 = (1+1)^2$ et donc la propriété est vraie pour $n=0$.

* Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $S_n = (n+1)^2$ et montrons que:

$$S_{n+1} = (n+2)^2$$

On a: $S_{n+1} = 1+3+5+\cdots+(2n+1)+[2(n+1)+1]$

$= S_n + (2n+3)$

On $S_n = (n+1)^2$, alors: $S_{n+1} = (n+1)^2 + (2n+3)$

$= n^2 + 2n + 1 + 2n + 3$

$= n^2 + 4n + 4$

$= (n+2)^2$

D'où: $S_{n+1} = (n+2)^2$

Donc par le principe de récurrence, on a:

$$\boxed{(\forall n \in \mathbb{N}) \; ; \; 1+3+5+\cdots+(2n+1) = (n+1)^2}$$

2) Montrons que: $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \; ; \; 1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

On pose $S_n = 1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

* Pour $n=1$, on a: $S_1 = 1^3 = 1$ et $\left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2 = 1$

  Donc l'égalité est vraie pour $n=1$.

* Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $S_n = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ et montrons que:

$$S_{n+1} = \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2$$

On a: $S_{n+1} = 1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3+(n+1)^3$

$= S_n + (n+1)^3$

$$= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 \quad \text{(D'après l'hypothèse)}$$

$$= (n+1)^2\left(\frac{n^2}{4} + (n+1)\right)$$

$$= (n+1)^2\left(\frac{n^2+4n+4}{4}\right)$$

$$= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

$$= \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2$$

D'où: $S_{n+1} = \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2$

Donc par le principe de récurrence, on a:

$$\boxed{(\forall n \in \mathbb{N}^*);\ 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2}$$

3) Montrons que: $(\forall n \in \mathbb{N}^*);\ 1\times 2 + 2\times 3 + \dots + n\times(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

On pose: $S_n = 1\times 2 + 2\times 3 + \dots + n\times(n+1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

* pour $n=1$, on a: $S_1 = 1\times 2 = 2$ et $\frac{1(1+1)(1+2)}{3} = \frac{2\times 3}{3} = 2$

Donc l'égalité est vraie pour $n=1$.

* Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $S_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ et montrons que

$$S_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$$

On a: $S_{n+1} = 1\times 2 + 2\times 3 + \dots + n\times(n+1) + (n+1)\times(n+2)$

$$= S_n + (n+1)\times(n+2)$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)(n+2) \quad \text{(D'après l'hypothèse)}$$

$$= (n+1)(n+2)\left(\frac{n}{3} + 1\right)$$

$$= \frac{(n+1)(n+1)(n+3)}{3}$$

D'où : $S_{n+1} = \frac{(n+1)(n+1)(n+3)}{3}$

Donc par le principe de récurrence, on a :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; 1\times 2 + 2\times 3 + 3\times 4 + \cdots + n\times(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

4) Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ;$ 9 divise $4^n + 6n - 1$.

* pour $n = 0$, on a : $4^0 + 6\times 0 - 1 = 0$ et 9 divise 0.

Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

* Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que 9 divise $4^n + 6n - 1$ et montrons que 9 divise $4^{n+1} + 6(n+1) - 1$.

On a : $4^{n+1} + 6(n+1) - 1 = 4\times 4^n + 6n + 5$

$= 4\times 4^n + 24n - 18n + 9 - 4$

$= (4\times 4^n + 24n - 4) - 18n + 9$

$= 4(4^n + 6n - 1) - 9(2n - 1)$

par l'hypothèse de récurrence $4^n + 6n - 1$ est divisible par 9,

donc : $(\exists k \in \mathbb{N}) ; 4^n + 6n - 1 = 9k$

Alors : $4^{n+1} + 6(n+1) - 1 = 4\times 9k - 9(2n - 1)$

$= 9(4k - 2n + 1)$

$= 9k'$ où $k' = 4k - 2n + 1$

D'où 9 divise $4^{n+1} + 6(n+1) - 1$.

Donc par le principe de récurrence, on a :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ;\ 9 \text{ divise } 4^n + 6n - 1$$

5) Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ;$ 11 divise $3^{2n} + 2^{6n-5}$

* pour $n = 1$, on a : $3^{2\times 1} + 2^{6\times 1 - 5} = 3^2 + 2^1 = 9 + 2 = 11$

et 11 divise 11. Donc la propriété est vraie pour $n = 1$.

* Soit $n \in \mathbb{N}^*$. supposons que 11 divise $3^{2n} + 2^{6n-5}$ et montrons que 11 divise $3^{2(n+1)} + 2^{6(n+1)-5}$.

On a: $3^{2(n+1)} + 2^{6(n+1)-5} = 3^2 \times 3^{2n} + 2^6 \times 2^{6n-5}$

$= 9 \times 3^{2n} + 64 \times 2^{6n-5}$

$= 9 \times 3^{2n} + (55+9) \times 2^{6n-5}$

$= 9 \times 3^{2n} + 55 \times 2^{6n-5} + 9 \times 2^{6n-5}$

$= 9(3^{2n} + 2^{6n-5}) + 55 \times 2^{6n-5}$

Par l'hypothèse de récurrence 11 divise $3^{2n} + 2^{6n-5}$.

Donc $3^{2n} + 2^{6n-5} = 11k$ où $k \in \mathbb{N}$.

Alors: $3^{2(n+1)} + 2^{6(n+1)-5} = 9 \times 11k + 11 \times 5 \times 2^{6n-5}$

$= 11(9k + 5 \times 2^{6n-5})$

D'où 11 divise $3^{2(n+1)} + 2^{6(n+1)-5}$.

Donc par le principe de récurrence, on a:

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*);\ 11 \text{ divise } 3^{2n} + 2^{6n-5}$$

6) Montrons que: $(\forall n \in \mathbb{N});\ (n > 5 \Rightarrow 2^n > n^2)$

* pour $n = 6$, on a: $2^6 = 64$ et $6^2 = 36$, donc $2^6 > 6^2$.

Alors l'inégalité est vraie pour $n = 6$.

* Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 6$. Supposons que $2^n > n^2$ et montrons que $2^{n+1} > (n+1)^2$.

On a: $2^{n+1} = 2 \times 2^n$ et par hypothèse on a: $2^n > n^2$

Donc: $2^{n+1} > 2n^2$.

Il suffit donc de montrer que $2n^2 \geq (n+1)^2$.

On a: $2n^2 - (n+1)^2 = 2n^2 - n^2 - 2n - 1$

$$= n^2 - 2n - 1$$
$$= (n^2 - 2n + 1) - 2$$
$$= (n-1)^2 - 2$$

On $n \geqslant 6$, alors $n-1 \geqslant 5$ et donc $(n-1)^2 \geqslant 25$.

D'où : $(n-1)^2 - 2 \geqslant 23 > 0$.

Ainsi : $2n^2 \geqslant (n+1)^2$

Par conséquent : $2^{n+1} > 2n^2 \geqslant (n+1)^2$

D'où : $2^{n+1} > (n+1)^2$

Conclusion: par le principe de récurrence, on a :

$$(\forall n \in \mathbb{N});\ (n > 5 \Rightarrow 2^n > n^2)$$

Exercice n°16

1) Montrons que: $(\forall (a,b) \in \mathbb{Q}^2);\ a + b\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$

Montrons les deux implications. Soient a et b dans $\mathbb{Q}$.

($\Leftarrow$) on a: $a = b = 0 \Rightarrow a + b\sqrt{2} = 0 + 0 \times \sqrt{2} = 0$

Donc : $a = b = 0 \Rightarrow a + b\sqrt{2} = 0$

($\Rightarrow$) Supposons que $a + b\sqrt{2} = 0$ et montrons que $a = b = 0$.

Supposons par l'absurde que $b \neq 0$.

Alors: $a + b\sqrt{2} = 0 \Rightarrow \sqrt{2} = -\frac{a}{b}$

on $(a,b) \in \mathbb{Q}^2$, alors $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ ce qui absurde.

D'où : $a = b = 0$.

Donc, $a + b\sqrt{2} = 0 \Rightarrow a = b = 0$

Par suite : $(\forall (a,b) \in \mathbb{Q}^2);\ a + b\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$

2) Déduisons que pour tout $(x,y,x',y') \in \mathbb{Q}^4$, on a :

$$x+y\sqrt{2} = x'+y'\sqrt{2} \iff (x=x' \text{ et } y=y')$$

Soient x, y, x' et y' dans $\mathbb{Q}$.

On a : $x+y\sqrt{2} = x'+y'\sqrt{2} \iff x-x'+(y-y')\sqrt{2} = 0$

D'après la question 1), on a :

$$x-x'+(y-y')\sqrt{2} = 0 \iff x-x' = y-y' = 0$$

$$\iff \begin{cases} x-x' = 0 \\ y-y' = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$$

D'où :

$$\boxed{(\forall (x,y,x',y') \in \mathbb{Q}^4);\ x+y\sqrt{2} = x'+y'\sqrt{2} \iff (x=x' \text{ et } y=y')}$$

Exercice n°17

Montrons que si $2n+1$ est un carré parfait, alors $n+1$ est la somme de deux carrés parfaits.

Supposons que $2n+1$ est un carré parfait. Alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $2n+1 = k^2$.

Comme $2n+1$ est impair, alors k est impair.

Donc $k = 2p+1$ où $p \in \mathbb{N}$.

D'où : $2n+1 = (2p+1)^2 = 4p^2+4p+1$

Donc : $n = \dfrac{4p^2+4p}{2} = 2p^2+2p$

Ainsi : $n+1 = 2p^2+2p+1$

$= p^2+(p^2+2p+1)$

$= p^2 + (p+1)^2$

Par suite $n+1$ est la somme de deux carrés parfaits.

Exercice n°18

1) Montrons que : $|xy| \leqslant \frac{1}{2} z^2$

On sait que $|x+y| \leqslant z$ et $|x-y| \leqslant z$

Donc $(x+y)^2 \leqslant z^2$ et $(x-y) \leqslant z^2$

Alors : $-z^2 \leqslant (x+y)^2 - (x-y)^2 \leqslant z^2$

comme $(x+y)^2 - (x-y)^2 = 4xy$, donc : $-z^2 \leqslant 4xy \leqslant z^2$

c.à.d : $|xy| \leqslant \frac{1}{4} z^2$ et puisque $\frac{1}{4} z^2 \leqslant \frac{1}{2} z^2$, on obtient :

$$\boxed{|xy| \leqslant \frac{1}{2} z^2}$$

2) Montrons que : $|x|+|y| \leqslant |z|$

On distingue deux cas :

* si x et y ont le même signe, c'est-à-dire si $xy \geqslant 0$,
alors : $|x|+|y| = |x+y|$ et comme $|x+y| \leqslant z$, on obtient :
$$|x|+|y| \leqslant z$$
* si x et y ont des signes contraires, c'est-à-dire si $xy \leqslant 0$, alors : $|x|+|y| = |x-y|$ et puisque $|x-y| \leqslant z$, on obtient : $|x|+|y| \leqslant z$.

Dans les deux cas, on a : $\boxed{|x|+|y| \leqslant z}$

Exercice n°19

1) Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1,2\})\ ;\ (1+\alpha)^n \geqslant 1 + n\alpha + \frac{n(n-1)}{2}\alpha^2$

* pour $n=3$, on a : $(1+\alpha)^3 = 1 + 3\alpha + 3\alpha^2 + \alpha^3$
et $1 + 3\alpha + \frac{3(3-1)}{2}\alpha^2 = 1 + 3\alpha + 3\alpha^2$

Comme $\alpha > 0$, alors : $(1+\alpha)^3 \geqslant 1+3\alpha+\frac{3(3-1)}{2}\alpha^2$

Donc l'inégalité est vraie pour $n=3$.

* Soit $n \in \mathbb{N}^* - \{1,2\}$. Supposons que : $(1+\alpha)^n \geqslant 1+n\alpha+\frac{n(n-1)}{2}\alpha^2$

et montrons que : $(1+\alpha)^{n+1} \geqslant 1+(n+1)\alpha+\frac{(n+1)n}{2}\alpha^2$

On a : $(1+\alpha)^{n+1} = (1+\alpha)(1+\alpha)^n$

D'après l'hypothèse de récurrence, on a :

$$(1+\alpha)^n \geqslant 1+n\alpha+\frac{n(n-1)}{2}\alpha^2$$

Alors : $(1+\alpha)^{n+1} \geqslant (1+\alpha)\left(1+n\alpha+\frac{n(n-1)}{2}\alpha^2\right)$

$$= 1+n\alpha+\frac{n(n-1)}{2}\alpha^2+\alpha+n\alpha^2+\frac{n(n-1)}{2}\alpha^3$$

$$= 1+(n+1)\alpha+\left(\frac{n(n-1)}{2}+n\right)\alpha^2+\frac{n(n-1)}{2}\alpha^3$$

$$= 1+(n+1)\alpha+\frac{n(n+1)}{2}\alpha^2+\frac{n(n-1)}{2}\alpha^3$$

Comme $\alpha \geqslant 0$, alors $\frac{n(n-1)}{2}\alpha^3 \geqslant 0$, d'où :

$$(1+\alpha)^{n+1} \geqslant 1+(n+1)\alpha+\frac{n(n+1)}{2}\alpha^2$$

D'où par le principe de récurrence, on a :

$$\boxed{\left(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1,2\}\right);\ (1+\alpha)^n \geqslant 1+n\alpha+\frac{n(n-1)}{2}\alpha^2}$$

2) Déduisons que : $\left(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1,2\}\right);\ \left(1+\frac{1}{2n}\right)^n \geqslant \frac{1}{8}\left(13-\frac{1}{n}\right)$

Soit $n \in \mathbb{N}^* - \{1,2\}$.

D'après la question 1), on a : $(1+\alpha)^n \geqslant 1+n\alpha+\frac{n(n-1)}{2}\alpha^2$

on prend $\alpha = \frac{1}{2n}$, on obtient :

$$\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n \geqslant 1+n\times\frac{1}{2n}+\frac{n(n-1)}{2}\times\left(\frac{1}{2n}\right)^2$$

$$= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\times\frac{n-1}{n}$$

$$= \frac{12}{8}+\frac{1}{8}\cdot\frac{n-1}{n}$$

$$= \frac{1}{8}\left(12+\frac{n-1}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left(13-\frac{1}{n}\right)$$

D'où: $\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n \geqslant \frac{1}{8}\left(13-\frac{1}{n}\right)$

Donc par le principe de récurrence, on a:

$$\boxed{\left(\forall n\in\mathbb{N}^*-\{1,2\}\right);\ \left(1+\frac{1}{2n}\right)^n \geqslant \frac{1}{8}\left(13-\frac{1}{n}\right)}$$

Exercice n°20

1) Calculons $f(0)$.

On a pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $f(x+y)=f(x)+f(y)$

pour $x=y=0$, on obtient : $f(0+0)=f(0)+f(0)$

c.à.d: $f(0)=2f(0)$, d'où : $\boxed{f(0)=0}$

2) Montrons que f est impaire.

On a $D_f=\mathbb{R}$. Soit $x\in\mathbb{R}$, alors pour $y=-x$, on a:

$$f(x+(-x))=f(x)+f(-x)$$

c.à.d: $$f(0)=f(x)+f(-x)$$

Or $f(0)=0$ (d'après 1), alors: $f(-x)=-f(x)$

Ce qui montre que la fonction f est impaire.

3) Montrons que : $(\exists a \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{N})\ ;\ f(x) = ax$

On a :

$$f(2) = f(1+1) = f(1) + f(1) = 2f(1)$$
$$f(3) = f(1+2) = f(1) + f(2) = f(1) + 2f(1) = 3f(1)$$
$$f(4) = f(1+3) = f(1) + f(3) = f(1) + 3f(1) = 4f(1)$$

On remarque que : $(\forall x \geqslant 2)\ ;\ f(x) = xf(1)$.

Montrons ce résultat par récurrence :

* pour $x = 2$, l'égalité est vraie.
* Soit $x \geqslant 2$ un entier. Supposons que $f(x) = xf(1)$ et montrons que $f(x+1) = (x+1)f(1)$.

On a : $f(x+1) = f(x) + f(1)$
$= xf(1) + f(1)$ (par hypothèse)
$= (x+1)f(1)$

Donc par le principe de récurrence, on a : $(\forall x \geqslant 2)\ ;\ f(x) = xf(1)$

pour $x = 0$, $f(0) = 0 = 0 \times f(0)$ (d'après la question 1)

et pour $x = 1$, on a : $f(1) = 1 \times f(1)$.

On pose donc $a = f(1)$. Alors on obtient :

$$\boxed{(\exists a \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{N})\ ;\ f(x) = ax}$$

4) Montrons que : $(\exists a \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{Z})\ ;\ f(x) = ax$

on pose $a = f(1)$ et soit $x \in \mathbb{Z}$.

* si $x \geqslant 0$, alors d'après la question 1), on a : $f(x) = ax$
* si $x < 0$, alors $-x > 0$ et donc d'après la question 1), on a :

$$f(-x) = a(-x) = -ax$$

Comme f est impaire (d'après 2)), on trouve: $-f(x) = -ax$

c.à.d: $f(x) = ax$

Dans les deux cas, on a: $f(x) = ax$

D'où: $\boxed{(\exists a \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{Z});\ f(x) = ax}$

5) Montrons que: $(\exists a \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{Q});\ f(x) = ax$

On pose $a = f(1)$ et soit $x \in \mathbb{Q}$. On écrit $x = \frac{p}{q}$ où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. On a: $x = \frac{p}{q}$, donc: $p = qx$. Alors: $f(p) = f(qx)$

Comme $p \in \mathbb{Z}$, alors d'après la question 4), $f(p) = ap$.

Donc: $ap = f(qx)$

D'autre part, on a: $qx = \underbrace{x + x + \dots + x}_{q \text{ fois}}$ (car $q \in \mathbb{N}^*$)

Donc: $f(qx) = f(\underbrace{x + x + \dots + x}_{q \text{ fois}}) = \underbrace{f(x) + f(x) + \dots + f(x)}_{q \text{ fois}} = qf(x)$

On a montré donc que $ap = f(qx)$ et $f(qx) = qf(x)$

D'où: $ap = qf(x)$, c.à.d: $f(x) = a\frac{p}{q} = ax$ (car: $x = \frac{p}{q}$)

Par suite: $\boxed{(\exists a \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{Q});\ f(x) = ax}$