Ordre et opérations

I - Comparaison de deux nombres réels.

Définition: Soient a et b deux nombres réels.
$a \leqslant b$ signifier que: $a - b \leqslant 0$.

Exemples:

1) Comparons $\frac{7}{8}$ et $\frac{3}{4}$.

on a: $\frac{7}{8} - \frac{3}{4} = \frac{7}{8} - \frac{6}{8} = \frac{1}{8} \geqslant 0$

Donc: $\frac{7}{8} \geqslant \frac{3}{4}$

2) Soient a et b deux nombres réels tels que $a + 3 = b - \sqrt{2}$.
Comparons a et b.
On a: $a + 3 = b - \sqrt{2}$ s.q: $a - b = -3 - \sqrt{2}$
or: $-3 - \sqrt{2} \leqslant 0$, donc: $a \leqslant b$.

Remarque: Pour comparer deux nombres, on peut déterminer le signe de leur différence.

II - Ordre et opérations:

1 - Ordre et addition:

Propriété: Soient a, b et c trois nombres réels.
$a \leqslant b$ signifier que: $a + c \leqslant b + c$

Exemples:

1) si $x \leqslant -3$, alors: $x + 3 \leqslant x + (-3)$
s.q: $x + 3 \leqslant 0$.

3) si $y + 2 > 3$, alors: $y + 2 - 2 > 3 - 2$
s.q: $y > 1$.

2 - Ordre et multiplication:

Propriété: Soient a, b et k trois nombres réels.
1) si $a \leqslant b$ et $k > 0$, alors $ka \leqslant kb$.

2) Si $a \leqslant b$ et $k < 0$, alors $ka \geqslant kb$.

Exemples:

1) Si $x \leqslant 2$, alors $3 \times x \leqslant 3 \times 2$, c.à.d: $3x \leqslant 6$.

2) Si $-4x \geqslant 5$, alors $\left(-\frac{1}{4}\right) \times (-4x) \leqslant \left(-\frac{1}{4}\right) \times 5$

c.à.d: $x \leqslant -\frac{5}{4}$

Remarque: $a \leqslant b$ signifie que $-b \geqslant -a$.

Application:

1) Soient a et b deux nombres réels tels que $a - \sqrt{2} = b + 3$.

comparer a et b.

2) Soit x un nombre réel tel que $-3x + 1 \leqslant 7$.

(a) Montrer que: $x \geqslant -2$

(b) comparer $2x$ et 4.

3- Ordre et inverse:

Propriété: Soient a et b deux nombres réels non nuls.

$a \leqslant b$ signifie que: $\frac{1}{b} \leqslant \frac{1}{a}$.

Exemples:

si $\frac{1}{x} \leqslant 3$, alors $x \geqslant \frac{1}{3}$.

4- Ordre et carré:

Propriété: Soient a et b deux nombres réels positifs.

1) si $a \leqslant b$, alors: $a^2 \leqslant b^2$.

2) si $a \leqslant b$, alors: $\sqrt{a} \leqslant \sqrt{b}$.

Exemple:

comparons $3\sqrt{2}$ et $2\sqrt{3}$.

on a $(3\sqrt{2})^2 = 9 \times 2 = 18$ et $(2\sqrt{3})^2 = 4 \times 3 = 12$

Donc $(3\sqrt{2})^2 > (2\sqrt{3})^2$ et comme $3\sqrt{2}$ et $2\sqrt{3}$ sont positifs

on en déduit que $3\sqrt{2} > 2\sqrt{3}$.

Application: Soient $a=\sqrt{7}$ et $b=2\sqrt{2}$.

1) Comparer a et b.

2) En déduire la comparaison de $\frac{1}{\sqrt{7}+9}$ et $\frac{1}{2\sqrt{2}+9}$.

III - Encadrement:

Définition: Soient a et b deux nombres réels avec $a<b$.
La relation $a \leqslant x \leqslant b$ est appelée un encadrement de x.

Exemple: on a $1,41 < \sqrt{2} < 1,42$

* cette relation est un encadrement de $\sqrt{2}$.
* le nombre $1,41$ est appelée une valeur approchée par défaut de $\sqrt{2}$.
* le nombre $1,42$ est appelée une valeur approchée par excès de $\sqrt{2}$.

1 - Encadrement d'une somme:

Propriété: Soient a, b, c et d des nombres réels.
Si $a \leqslant x \leqslant b$ et $c \leqslant y \leqslant d$, alors $a+c \leqslant x+y \leqslant b+d$.

Exemple: Si $-3 \leqslant x \leqslant 2$ et $5 \leqslant y \leqslant 7$
alors: $-3+5 \leqslant x+y \leqslant 2+7$
D'où: $2 \leqslant x+y \leqslant 9$

2 - Encadrement d'une différence:

Exemple: Soient a et b deux nombres réels tels que:

$$3 \leqslant a \leqslant 4 \text{ et } -3 \leqslant b \leqslant 1$$

Encadrons $a-b$.
Pour encader $a-b$, encadrons tout d'abord $-b$.
On a: $-3 \leqslant b \leqslant 1$, donc: $-1 \leqslant -b \leqslant -(-3)$
c.à.d. $-1 \leqslant -b \leqslant 3$.
Encadrons maintenant $a-b$.
On a: $3 \leqslant a \leqslant 4$ et $-1 \leqslant -b \leqslant 3$
Donc: $3+(-1) \leqslant a+(-b) \leqslant 4+3$
D'où: $2 \leqslant a-b \leqslant 7$

3- Encadrons d'un produit :

Propriété : Soient a, b, c et d des nombres réels positifs.
Si $a \leqslant x \leqslant b$ et $c \leqslant y \leqslant d$, alors : $ac \leqslant xy \leqslant bd$.

Exemple :

1) Soient x et y deux nombres réels tels que
$3 \leqslant x \leqslant 4$ et $2 \leqslant y \leqslant 5$.
Donc : $3 \times 2 \leqslant x \times y \leqslant 4 \times 5$
D'où : $6 \leqslant xy \leqslant 20$

2) Soient x et y deux nombres réels tels que
$-5 \leqslant x \leqslant -3$ et $4 \leqslant y \leqslant 7$
Encadrons xy.
On a : $-5 \leqslant x \leqslant -3$, donc $3 \leqslant -x \leqslant 5$
et puisque $4 \leqslant y \leqslant 7$, on aura : $3 \times 4 \leqslant -x \times y \leqslant 5 \times 7$
D'où : $12 \leqslant -xy \leqslant 35$.

Application : Soient a et b deux nombres réels tels que
$-1 \leqslant a \leqslant -2$ et $4 \leqslant b \leqslant 5$.
Encadrer les nombres suivants :
$$a+b \; ; \; -b \; ; \; ab \; ; \; 2a-3b \; ; \; \frac{a}{b}$$