Ordre et opérations (Solutions)

Exercice 1:

On a: $a-\sqrt{3}=b+\sqrt{2}$ signifie que: $a-b=\sqrt{2}+\sqrt{3}>0$

Donc: $a-b>0$ et par suite: $\boxed{a>b}$

Exercice 2:

1) Comparons $x=5\sqrt{2}$ et $y=2\sqrt{5}$.

on a: * $x^2=(5\sqrt{2})^2=25\times 2=50$

* $y^2=(2\sqrt{5})^2=4\times 5=20$

Donc $x^2>y^2$ et puisque x et y sont positifs, alors $\boxed{x>y}$

2) Comparons $x=\frac{1}{3}$ et $y=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

on a: * $x^2=\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$

* $y^2=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{1}{2}$

comme $9>2$, alors $\frac{1}{9}<\frac{1}{2}$, c.à.d $x^2<y^2$ et puisque x et y sont positifs, alors $\boxed{x<y}$

3) Comparons $x=\sqrt{3}+\sqrt{7}$ et $y=2+\sqrt{6}$.

on a: * $x^2=(\sqrt{3}+\sqrt{7})^2$
$=\sqrt{3}^2+2\times\sqrt{3}\times\sqrt{7}+\sqrt{7}^2$
$=3+2\sqrt{21}+7$
$=10+2\sqrt{21}$

* $y^2=(2+\sqrt{6})^2$
$=2^2+2\times 2\times\sqrt{6}+\sqrt{6}^2$
$=4+4\sqrt{6}+6$
$=10+4\sqrt{6}$

Comparons $2\sqrt{21}$ et $4\sqrt{6}$.

on a: $\rightarrow (2\sqrt{21})^2=4\times 21=84$

$\rightarrow (4\sqrt{6})^2=16\times 6=96$

Alors $(2\sqrt{21})^2<(4\sqrt{6})^2$ et puisque $2\sqrt{21}$ et $4\sqrt{6}$ sont positifs,

donc: $2\sqrt{21}<4\sqrt{6}$ s.q: $10+2\sqrt{21}<10+4\sqrt{6}$

s.q: $x^2<y^2$

Or x et y sont positifs, alors $\boxed{x<y}$.

4) Comparons $x=\frac{1}{\sqrt{2}+1}$ et $y=\frac{1}{\sqrt{2}-1}$.

On a:

$$x-y=\frac{1}{\sqrt{2}+1}-\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\frac{\sqrt{2}-1-(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=\frac{-2}{\sqrt{2}^2-1^2}=\frac{-2}{2-1}=\frac{-2}{1}=-2<0$$

Donc: $x-y<0$ et par suite: $\boxed{x<y}$

Exercice 3:

1) Comparons $m+n$ et m.

On a: $(m+n)-m=\cancel{m}-\cancel{m}+n=n<0$ (car n est négatif)

Alors: $(m+n)-m<0$ et par suite $\boxed{m+n<m}$

2) Comparons $m+n$ et $m-n$.

On a: $(m+n)-(m-n)=\cancel{m}+n-\cancel{m}+n=2n<0$ (car n est négatif)

Alors: $(m+n)-(m-n)<0$ et par suite $\boxed{m+n<m-n}$

3) Comparons $m-n$ et $n-m$.

On a: $(m-n)-(n-m)=m-n-n+m=2m-2n=2(m-n)$

or: $\begin{cases} m>0 \\ n<0 \end{cases}$ s.q: $\begin{cases} m>0 \\ -n>0 \end{cases}$ s.q: $m+(-n)>0+0$ s.q: $m-n>0$

s.q: $2(m-n)>0$, donc: $(m-n)-(n-m)>0$. D'où: $\boxed{m-n>n-m}$

Exercice 4:

Comparons $a=2\sqrt{3}$ et $b=\sqrt{11}$ par deux méthodes:

* **Méthode 1:**

On a: * $a^2=(2\sqrt{3})^2=4\times 3=12$

* $b^2=\sqrt{11}^2=11$

Donc: $a^2>b^2$ et puisque a et b sont positifs, alors: $\boxed{a>b}$

* **Méthode 2:** on a: $a=2\sqrt{3}=\sqrt{4}\times\sqrt{3}=\sqrt{4\times 3}=\sqrt{12}$

et: $b=\sqrt{11}$

comme : $11 < 12$, alors : $\sqrt{11} < \sqrt{12}$.

D'où : $\boxed{a < b}$

Exercice 5 :

1) comparons $a = 7\sqrt{2}$ et $b = 5\sqrt{3}$.

On a : * $a^2 = (7\sqrt{2})^2 = 49 \times 2 = 98$

* $b^2 = (5\sqrt{3})^2 = 25 \times 3 = 75$

Donc $a^2 > b^2$ et puisque a et b sont positifs, alors $\boxed{a > b}$

2) Déduisons la comparaison de $7\sqrt{2} + 9$ et $5\sqrt{3} + 9$.

D'après la question 1), on a : $7\sqrt{2} > 5\sqrt{3}$, donc $\boxed{7\sqrt{2} + 9 > 5\sqrt{3} + 9}$

3) Déduisons la comparaison de $\dfrac{1}{7\sqrt{2}+9}$ et $\dfrac{1}{5\sqrt{3}+9}$.

D'après la question 2), on a : $7\sqrt{2} + 9 > 5\sqrt{3} + 9$.

D'où : $\boxed{\dfrac{1}{7\sqrt{2}+9} < \dfrac{1}{5\sqrt{3}+9}}$

Exercice 6 :

* Encadrons $a + b - 2$.

On a : $\begin{cases} -\frac{1}{2} \leqslant a \leqslant 1 \\ -\frac{2}{3} \leqslant b \leqslant \frac{1}{3} \end{cases}$, alors : $-\frac{1}{2} + \left(-\frac{2}{3}\right) \leqslant a + b \leqslant 1 + \frac{1}{3}$

S.q : $\dfrac{-1\times3 - 2\times2}{2\times3} \leqslant a + b \leqslant \dfrac{1\times3 + 1}{3}$

S.q : $\dfrac{-3-4}{6} \leqslant a + b \leqslant \dfrac{3+1}{3}$

S.q : $\dfrac{-7}{6} \leqslant a + b \leqslant \dfrac{4}{3}$

S.q : $\dfrac{-7}{6} - 2 \leqslant a + b - 2 \leqslant \dfrac{4}{3} - 2$

S.q : $\dfrac{-7 - 2\times6}{6} \leqslant a + b - 2 \leqslant \dfrac{4 - 2\times3}{3}$

S.q : $\dfrac{-7-12}{6} \leqslant a + b - 2 \leqslant \dfrac{4-6}{3}$

D'où : $\boxed{-\dfrac{19}{6} \leqslant a + b - 2 \leqslant -\dfrac{2}{3}}$

* Encadrons $a-b$.

Encadrons tout d'abord $-b$.

On a : $-\frac{2}{3} \leqslant b \leqslant \frac{1}{3}$ s.q : $\boxed{-\frac{1}{3} \leqslant -b \leqslant \frac{2}{3}}$

Alors : $\begin{cases} -\frac{1}{2} \leqslant a \leqslant 1 \\ -\frac{1}{3} \leqslant -b \leqslant \frac{2}{3} \end{cases}$, donc : $-\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{3}\right) \leqslant a + (-b) \leqslant 1 + \frac{2}{3}$

s.q : $\frac{-3-2}{6} \leqslant a-b \leqslant \frac{3+2}{3}$

D'où : $\boxed{-\frac{5}{6} \leqslant a-b \leqslant \frac{5}{3}}$

* Encadrons $2a-3b$.

On a : $-\frac{1}{2} \leqslant a \leqslant 1$ s.q : $2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \leqslant 2 \times a \leqslant 2 \times 1$ s.q : $\boxed{-1 \leqslant 2a \leqslant 2}$

et on a : $-\frac{2}{3} \leqslant b \leqslant \frac{1}{3}$ s.q : $-3 \times \frac{1}{3} \leqslant -3 \times b \leqslant -3 \times \left(-\frac{2}{3}\right)$ s.q : $\boxed{-1 \leqslant -3b \leqslant 2}$

On a donc : $\begin{cases} -1 \leqslant 2a \leqslant 2 \\ -1 \leqslant -3b \leqslant 2 \end{cases}$, alors : $-1 + (-1) \leqslant 2a + (-3b) \leqslant 2 + 2$

D'où : $\boxed{-2 \leqslant 2a - 3b \leqslant 4}$

Exercice 7 :

1) * Encadrons $2a+b$.

On a : $2 \leqslant a \leqslant 3$ s.q : $2 \times 2 \leqslant 2 \times a \leqslant 2 \times 3$ s.q : $4 \leqslant 2a \leqslant 6$

Alors : $\begin{cases} 4 \leqslant 2a \leqslant 6 \\ -3 \leqslant b \leqslant -2 \end{cases}$, donc : $4 + (-3) \leqslant 2a + b \leqslant 6 + (-2)$

D'où : $\boxed{1 \leqslant 2a+b \leqslant 4}$

* Encadrons a^2.

On a $2 \leqslant a \leqslant 3$, alors : $2^2 \leqslant a^2 \leqslant 3^2$, donc : $\boxed{4 \leqslant a^2 \leqslant 9}$

* Encadrons b^2.

On a : $-3 \leqslant b \leqslant -2$, alors : $(-2)^2 \leqslant b^2 \leqslant (-3)^2$, donc : $\boxed{4 \leqslant b^2 \leqslant 9}$

* Encadrons $2a-b$.

On a déjà trouvé que $4 \leqslant 2a \leqslant 6$.

On a aussi $-3 \leqslant b \leqslant -2$, c.à.d : $2 \leqslant -b \leqslant 3$.

Alors : $\begin{cases} 4 \leqslant 2a \leqslant 6 \\ 2 \leqslant -b \leqslant 3 \end{cases}$, donc : $4+(-2) \leqslant 2a+(-b) \leqslant 6+3$

D'où : $\boxed{2 \leqslant 2a-b \leqslant 9}$

2) Déterminons un encadrement de c.

on a : $2a-c=3b$ s.q : $c=2b-3b$ s.q : $c=-b$

comme : $2 \leqslant -b \leqslant 3$, d'où : $\boxed{2 \leqslant c \leqslant 3}$

Exercice 8 :

1) comparons $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$ et 2.

on a : $\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)-2=\frac{x^2}{xy}+\frac{y^2}{xy}-\frac{2xy}{xy}=\frac{x^2-2xy+y^2}{xy}=\frac{(x-y)^2}{xy}$

* $(x-y)^2 \geqslant 0$ (car le carré d'un nombre est toujours positif)
* $xy > 0$ (car x et y sont positifs)

Donc : $\frac{(x-y)^2}{xy} \geqslant 0$ et par suite : $\boxed{\frac{x}{y}+\frac{y}{x} \geqslant 2}$

2) comparons $x+y$ et $2\sqrt{xy}$.

on a : $(x+y)-2\sqrt{xy}=(\sqrt{x})^2-2\sqrt{x}\times\sqrt{y}+(\sqrt{y})^2=(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 \geqslant 0$

Donc : $\boxed{x+y \geqslant 2\sqrt{xy}}$

3) comparons $\frac{1}{x^2}+x^2$ et 2.

on a : $\left(\frac{1}{x^2}+x^2\right)-2=\left(\frac{1}{x}\right)^2-2\times\frac{1}{x}\times x+x^2=\left(\frac{1}{x}-x\right)^2 \geqslant 0$

Donc : $\boxed{\frac{1}{x^2}+x^2 \geqslant 0}$

Exercice 9 (challenge) :

1) Montrons que : $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leqslant \frac{a^2+b^2}{2}$.

on a : $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\frac{a^2+b^2}{2}=\frac{a^2+2ab+b^2}{4}-\frac{2(a^2+b^2)}{4}$

$$=\frac{a^2+2ab+b^2-2a^2-2b^2}{4}$$

$$=\frac{-(a^2-2ab+b^2)}{4}$$

$$= \frac{-(a-b)^2}{4} \leqslant 0$$

D'où : $\boxed{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leqslant \frac{a^2+b^2}{2}}$

2) Déduisons que : $a+b \leqslant 2\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$

D'après la question 1), on a : $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leqslant \frac{a^2+b^2}{2}$

s.q : $\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$

s.q : $\frac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$

s.q : $2 \times \frac{a+b}{2} \leqslant 2 \times \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$

D'où : $\boxed{a+b \leqslant 2\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}}$

3) D'après la question 1), on a : $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leqslant \frac{a^2+b^2}{2}$ (*)

Si $a+b=1$, alors (*) sera : $\left(\frac{1}{2}\right)^2 \leqslant \frac{a^2+b^2}{2}$

c.à.d : $\frac{1}{4} \leqslant \frac{a^2+b^2}{2}$

c.à.d : $2 \times \frac{1}{4} \leqslant 2 \times \frac{a^2+b^2}{2}$

c.à.d : $\frac{1}{2} \leqslant a^2+b^2$

D'où : $\boxed{a^2+b^2 \geqslant \frac{1}{2}}$

On a aussi : $a+b=1$ s.q : $(a+b)^2 = 1^2$

s.q : $a^2 + 2ab + b^2 = 1$

s.q : $2ab = 1-(a^2+b^2)$

s.q : $ab = \frac{1-(a^2+b^2)}{2}$

Puisque : $a^2+b^2 \geqslant \frac{1}{2}$, alors : $-(a^2+b^2) \leqslant -\frac{1}{2}$

$$\text{S.q: } 1-(a^2+b^2) \leqslant 1-\frac{1}{2}$$

$$\text{S.q: } 1-(a^2+b^2) \leqslant \frac{1}{2}$$

$$\text{S.q: } \frac{1-(a^2+b^2)}{2} \leqslant \frac{\frac{1}{2}}{2}$$

$$\text{S.q: } \frac{1-(a^2+b^2)}{2} \leqslant \frac{1}{4}$$

D'où: $\boxed{ab \leqslant \frac{1}{4}}$

4) D'après la question 3), on a: $a^2+b^2 \geqslant \frac{1}{2}$

$$\text{S.q: } \left(a^2+2+\frac{1}{a^2}\right)+\left(b^2+2+\frac{1}{b^2}\right) \geqslant \frac{1}{2}+2+\frac{1}{a^2}+2+\frac{1}{b^2}$$

$$\text{S.q: } \left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2 \geqslant \frac{9}{2}+\frac{a^2+b^2}{(ab)^2}$$

or: $ab \leqslant \frac{1}{4}$, alors: $(ab)^2 \leqslant \frac{1}{16}$ s.q: $\frac{1}{(ab)^2} \geqslant 16$

$$\text{S.q: } \frac{a^2+b^2}{(ab)^2} \geqslant 16\,(a^2+b^2)$$

$$\text{S.q: } \frac{a^2+b^2}{(ab)^2} \geqslant 16 \times \frac{1}{2} \quad \left(\text{car } a^2+b^2 \geqslant \frac{1}{2}\right)$$

$$\text{S.q: } \frac{a^2+b^2}{(ab)^2} \geqslant 8$$

Donc: $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2 \geqslant \frac{9}{2}+8$

D'où: $\boxed{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2 \geqslant \frac{25}{2}}$