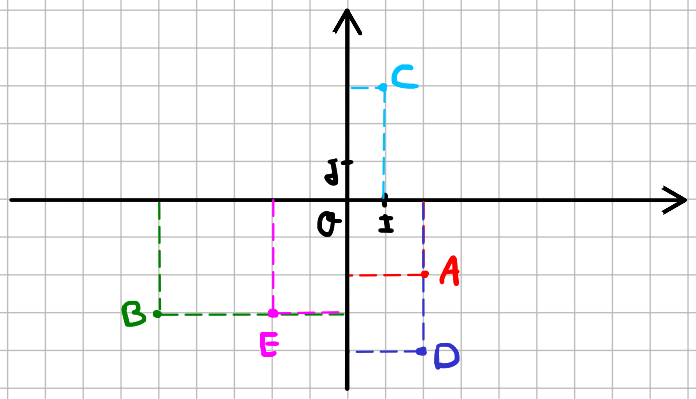
Repère dans le plan (Solution)

Exercice 1

1) Construction des points A, B, C, D et E.



2) * les coordonnées de $\vec{AB}$:

On a : $A(2;-2)$ et $B(-5;-3)$

Alors : $\vec{AB}(-5-2;-3-(-2))$

Donc : $\boxed{\vec{AB}(-7;-1)}$

* Les coordonnées de $\vec{BC}$:

On a : $B(-5;-3)$ et $C(1;3)$

Alors : $\vec{BC}(1-(-5);3-(-3))$

Donc : $\boxed{\vec{BC}(6;6)}$

* Les coordonnées de $\vec{DC}$:

On a : $D(2;-4)$ et $C(1;3)$

Alors : $\vec{DC}(1-2;3-(-4))$

Donc : $\boxed{\vec{DC}(-1;7)}$

* les coordonnées de $\vec{EA}$:

On a : $E(-2;-3)$ et $A(2;-2)$

Alors : $\vec{EA}(2-(-2);-2-(-3))$

Donc : $\boxed{\vec{EA}(4;1)}$

* les coordonnées de $\vec{ID}$:

On a : $I(1;0)$ et $D(2;-4)$

Alors : $\vec{ID}(2-1;-4-0)$

Donc : $\boxed{\vec{ID}(1;-4)}$

* Les coordonnées de $\vec{IE}$:

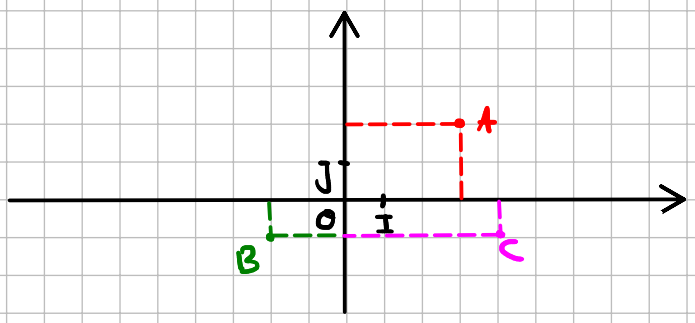
On a : $I(1;0)$ et $E(-2;-3)$

Alors : $\vec{IE}(-2-1;-3-0)$

Donc : $\boxed{\vec{IE}(-3;-3)}$

Exercice 2

1) construction des points A, B et C :



2) * Les coordonnées de $\overrightarrow{AC}$:

On a : $A(3;2)$ et $C(4;-1)$

Alors : $\overrightarrow{AC}(4-3;-1-2)$

Donc : $\boxed{\overrightarrow{AC}(1;-3)}$

* Les coordonnées de $\overrightarrow{AJ}$:

On a : $A(3;2)$ et $J(0;1)$

Alors : $\overrightarrow{AJ}(0-3;1-2)$

Donc : $\boxed{\overrightarrow{AJ}(-3;-1)}$

* Les coordonnées de $\overrightarrow{IB}$:

On a : $I(1;0)$ et $B(-2;-1)$

Alors : $\overrightarrow{IB}(-2-1;-1-0)$

Donc : $\boxed{\overrightarrow{IB}(-3;-1)}$

* La nature du quadrilatère AJBI :

On a : $\overrightarrow{AJ}(-3;-1)$ et $\overrightarrow{IB}(-3;-1)$

Alors : $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{IB}$

D'où AJBI est un parallélogramme.

3) Montrons que $(2;0)$ est le couple des coordonnées du point K le milieu de $[JC]$:

On a : $J(0;1)$ et $C(4;-1)$

Alors : $K\left(\frac{0+4}{2}; \frac{1+(-1)}{2}\right)$

Donc : $\boxed{K(2;0)}$

4) * La distance AJ :

On a : $\overrightarrow{AJ}(-3;-1)$

Alors : $AJ = \sqrt{(-3)^2+(-1)^2}$

$= \sqrt{9+1}$

$= \sqrt{10}$

D'où : $\boxed{AJ = \sqrt{10}}$

* La distance $\overrightarrow{AC}$:

On a : $\overrightarrow{AC}(1;-3)$

Alors : $AC = \sqrt{1^2+(-3)^2}$

$= \sqrt{1+9}$

$= \sqrt{10}$

D'où : $\boxed{AC = \sqrt{10}}$

* La distance JC :

On a : $J(0;1)$ et $C(4;-1)$

Alors : $JC = \sqrt{(4-0)^2+(-1-1)^2} = \sqrt{4^2+0^2} = \sqrt{16} = 4$

D'où : $\boxed{JC = 4}$

Exercice 3

1] * Les coordonnées de $\vec{AB}$:

On a : $A(2;1)$ et $B(0;3)$

Alors : $\vec{AB}(0-2;3-1)$

Donc : $\boxed{\vec{AB}(-2;2)}$

* Vérifions que $AB = 2\sqrt{2}$:

On a : $\vec{AB}(-2;2)$

Alors : $AB = \sqrt{(-2)^2+2^2}$

$= \sqrt{4+4}$

$= \sqrt{8}$

$= 2\sqrt{2}$

D'où : $\boxed{AB = 2\sqrt{2}}$

2] Déterminons le couple des coordonnées du point M le milieu de [AB] :

On a : $A(2;1)$ et $B(0;3)$

Alors : $M\left(\frac{2+0}{2}; \frac{1+3}{2}\right)$

D'où : $\boxed{M(1;2)}$

3] Montrons que ABJ est un triangle rectangle :

* La distance AJ :

On a : $A(2;1)$ et $J(0;1)$

Alors : $AJ = \sqrt{(0-2)^2+(1-1)^2}$

$= \sqrt{(-2)^2+0^2}$

$= \sqrt{4}$

$= 2$

Donc : $\boxed{AJ = 2}$

* La distance BJ :

On a : $B(0;3)$ et $J(0;1)$

Alors : $BJ = \sqrt{(0-0)^2+(1-3)^2}$

$= \sqrt{0^2+(-2)^2}$

$= \sqrt{4}$

$= 2$

Donc : $\boxed{BJ = 2}$

On a donc : * $AB^2 = (2\sqrt{2})^2 = 4 \times 2 = 8$

* $AJ^2 = 2^2 = 4$

* $BJ^2 = 2^2 = 4$

On remarque que $AB^2 = AJ^2 + BJ^2$, donc d'après la réciproque du Théorème de Pythagore ABJ est un triangle rectangle en J.

Exercice 4

Déterminons les coordonnées du point M tel que: $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{DA}$

Soit $M(x_M ; y_M)$.

* Les coordonnées de $\overrightarrow{MB}$:
  On a: $M(x_M ; y_M)$ et $B(-1 ; 4)$
  Alors: $\overrightarrow{MB}(-1-x_M ; 4-y_M)$
* les coordonnées de $\overrightarrow{DA}$:
  On a: $D(0 ; -2)$ et $A(-2 ; 3)$
  Alors: $\overrightarrow{DA}(-2-0 ; 3-(-2))$
  Donc: $\overrightarrow{DA}(-2 ; 5)$

* Les coordonnées de $\overrightarrow{MC}$:
  On a: $M(x_M ; y_M)$ et $C(2 ; 5)$
  Alors: $\overrightarrow{MC}(2-x_M ; 5-y_M)$
* les coordonnées de $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$:
  On a: $\overrightarrow{MB}(-1-x_M ; 4-y_M)$ et $\overrightarrow{MC}(2-x_M ; 5-y_M)$
  Alors: $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}(-1-x_M+2-x_M ; 4-y_M+5-y_M)$
  Donc: $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}(-2x_M+1 ; -2y_M+9)$

Alors, on a: $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{DA}$

S.q: $-2x_M+1 = -2$ et $-2y_M+9 = 5$

S.q: $-2x_M = -2-1$ et $-2y_M = 5-9$

S.q: $-2x_M = -3$ et $-2y_M = -4$

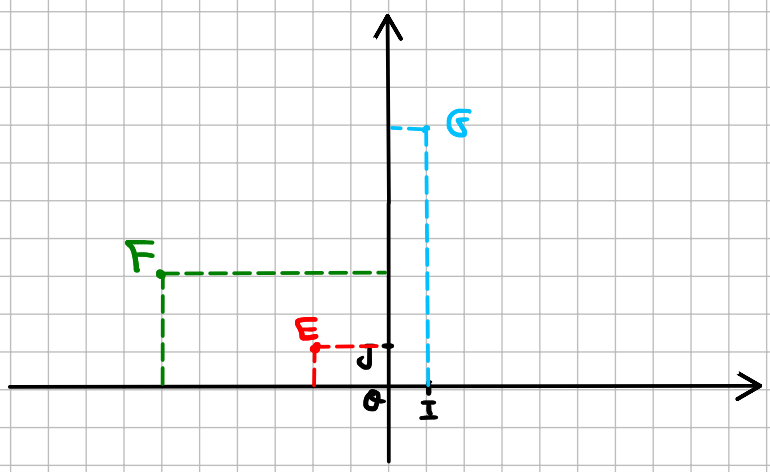
S.q: $x_M = \frac{-3}{-2}$ et $y_M = \frac{-4}{-2}$

S.q: $x_M = \frac{3}{2}$ et $y_M = 2$

Par suite: $\boxed{M\left(\frac{3}{2} ; 2\right)}$

Exercice 5

1] Construction des points E, F et G:



2) Calculons le périmètre du triangle EFG :

Calculons tout d'abord les distances EF, EG et FG.

* La distance EF :

On a : $E(-2;1)$ et $F(-6;3)$

Alors : $EF = \sqrt{(-6-(-2))^2 + (3-1)^2}$

$= \sqrt{(-4)^2 + 2^2}$

$= \sqrt{16+4}$

$= \sqrt{20}$

$= 2\sqrt{5}$

Donc : $\boxed{EF = 2\sqrt{5}}$

* La distance EG :

On a : $E(-2;1)$ et $G(1;7)$

Alors : $EG = \sqrt{(1-(-2))^2 + (7-1)^2}$

$= \sqrt{3^2 + 6^2}$

$= \sqrt{9+36}$

$= \sqrt{45}$

$= 3\sqrt{5}$

Donc : $\boxed{EG = 3\sqrt{5}}$

* La distance FG :

On a : $F(-6;3)$ et $G(1;7)$

Alors : $FG = \sqrt{(1-(-6))^2 + (7-3)^2}$

$= \sqrt{7^2 + 4^2}$

$= \sqrt{49+16}$

$= \sqrt{65}$

Donc : $\boxed{FG = \sqrt{65}}$

D'où le périmètre du triangle EFG est :

$$P = EF + EG + FG = 2\sqrt{5} + 3\sqrt{5} + \sqrt{65} = 5\sqrt{5} + \sqrt{65}$$

Par suite : $\boxed{P = 5\sqrt{5} + \sqrt{65}}$

3) Déterminons les coordonnées du point A le centre du cercle circonscrit au triangle EFG.

On a : * $EF^2 = (2\sqrt{5})^2 = 4 \times 5 = 20$

* $EG^2 = (3\sqrt{5})^2 = 9 \times 5 = 45$

* $FG^2 = \sqrt{65}^2 = 65$

on remarque que $EF^2 + EG^2 = FG^2$, donc d'après le théorème de Pythagore indirecte EFG est un triangle rectangle en E.

Alors le centre du cercle circonscrit au triangle EFG est le milieu de son hypoténuse [FG].

on F(-6;3) et G(1;7)

Alors $A\left(\frac{-6+1}{2}; \frac{3+7}{2}\right)$

D'où: $\boxed{A\left(\frac{-5}{2}; 5\right)}$

Calculons r le rayon de ce cercle:

Ce cercle passe par E(-2;1) et son centre est $A\left(\frac{-5}{2}; 5\right)$.

Alors: $r = AE$

$= \sqrt{\left(-2-\left(\frac{-5}{2}\right)\right)^2 + (1-5)^2}$

$= \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + (-4)^2}$

$= \sqrt{\frac{1}{4} + 16}$

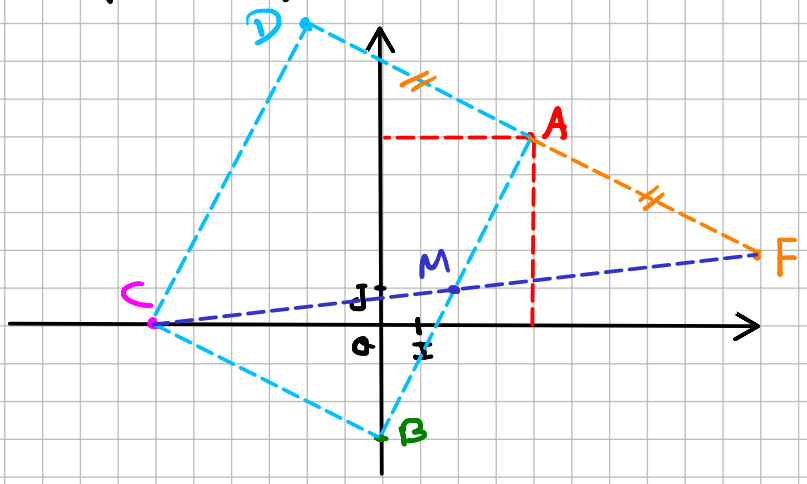
$= \sqrt{\frac{65}{4}}$

$= \frac{\sqrt{65}}{2}$

D'où: $\boxed{r = \frac{\sqrt{65}}{2}}$

Exercice 6

1] Construction des points A, B et C:



2-(a) * La distance AB:

On a: A(4;5) et B(0;-3)

Alors: $AB = \sqrt{(0-4)^2 + (-3-5)^2}$

$= \sqrt{(-4)^2 + (-8)^2}$

$= \sqrt{16+64}$

$= \sqrt{80}$

$= 4\sqrt{5}$

D'où: $\boxed{AB = 4\sqrt{5}}$

* La distance AC:

On a: $A(4;5)$ et $C(-6;0)$

Alors: $AC = \sqrt{(-6-4)^2+(0-5)^2}$

$= \sqrt{(-10)^2+(-5)^2}$

$= \sqrt{100+25}$

$= \sqrt{125}$

$= 5\sqrt{5}$

D'où: $\boxed{AC = 5\sqrt{5}}$

* La distance BC:

On a: $B(0;-3)$ et $C(-6;0)$

Alors: $BC = \sqrt{(-6-0)^2+(0-(-3))^2}$

$= \sqrt{(-6)^2+3^2}$

$= \sqrt{36+9}$

$= \sqrt{45}$

$= 3\sqrt{5}$

D'où: $\boxed{BC = 3\sqrt{5}}$

(b) Déduisons que ABC est un triangle rectangle:

On a: * $AB^2 = (4\sqrt{5})^2 = 16 \times 5 = 100$

* $AC^2 = (5\sqrt{5})^2 = 25 \times 5 = 125$

* $BC^2 = (3\sqrt{5})^2 = 9 \times 5 = 45$

Alors $AC^2 = AB^2 + BC^2$, donc d'après la réciproque du Théorème de Pythagore ABC est un triangle rectangle en B.

3-(a) Voir la figure.

(b) Montrons que ABCD est un rectangle:

On a: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, donc ABCD est un parallélogramme.

et d'après la question 2-(b), ABC est un triangle rectangle en B.
D'où ABCD est un rectangle.

(c) Les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$:

On a: $A(4;5)$ et $B(0;-3)$

Alors: $\overrightarrow{AB}(0-4;-3-5)$

Donc: $\boxed{\overrightarrow{AB}(-4;-8)}$

(d) Vérifions que D a pour coordonnées $(-2;8)$:

Soit $D(x_D;y_D)$.

On a: $D(x_D;y_D)$ et $C(-6;0)$

Alors: $\overrightarrow{DC}(-6-x_D;0-y_D)$

Donc: $\overrightarrow{DC}(-6-x_D;-y_D)$

On a: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

S.q: $-4=-6-x_D$ et $-8=-y_D$

S.q: $x_D=-6+4$ et $y_D=8$

S.q: $x_D=-2$ et $y_D=8$

D'où: $\boxed{D(-2;8)}$

4-(a) Les coordonnées du point K le milieu de [AC]:

On a: $A(4;5)$ et $C(-6;0)$

Alors: $K\left(\frac{4+(-6)}{2};\frac{5+0}{2}\right)$

Donc: $\boxed{K\left(-1;\frac{5}{2}\right)}$

(b) Que représente le point K pour le quadrilatère ABCD.

On a ABCD est un rectangle et [AC] son diagonale, et puisque K est le milieu de [AC], alors K est le centre de ABCD.

5) * Le centre du cercle (C) circonscrit au triangle ABC:

D'après la question 2-(b), ABC est un triangle rectangle en B.

Donc le centre de (C) est le milieu de [AC].

Comme $K\left(-1;\frac{5}{2}\right)$ est le milieu de [AC] (d'après la question 4-(a))

D'où le centre du cercle (C) est le point $K\left(-1;\frac{5}{2}\right)$.

* Le rayon du cercle (C):

Le cercle (C) est de centre $K(-1;\frac{5}{2})$ et passe par le point $A(4;5)$, alors son rayon est donné par:

$$r = AK$$
$$= \sqrt{(-1-4)^2+(\frac{5}{2}-5)^2}$$
$$= \sqrt{(-5)^2+(-\frac{5}{2})^2}$$
$$= \sqrt{25+\frac{25}{4}}$$
$$= \sqrt{\frac{125}{4}}$$
$$= \frac{5\sqrt{5}}{2}$$

D'où: $\boxed{r = \frac{5\sqrt{5}}{2}}$

6) Montrons que le point D appartient au cercle (C):

On a: $K(-1;\frac{5}{2})$ et $D(-2;8)$

Alors: $KD = \sqrt{(-2-(-1))^2+(8-\frac{5}{2})^2}$
$$= \sqrt{(-1)^2+(\frac{11}{2})^2}$$
$$= \sqrt{1+\frac{121}{4}}$$
$$= \sqrt{\frac{125}{4}}$$
$$= \frac{5\sqrt{5}}{2}$$
$$= r$$

Donc: $KD = r$, d'où: $\boxed{D \in (C)}$

7) Montrons que (CF) coupe [AB] en son milieu:

Soit M le point d'intersection de (AB) et (CF).

Dans le triangle FDC, on a $A \in (FD)$, $M \in (FC)$ et $(AM) \parallel (DC)$.

Donc d'après le théorème de Thalès directe, on a:

$$\frac{FA}{FD} = \frac{FM}{FC} = \frac{AM}{DC} \quad (*)$$

comme F est l'image de A par la translation de vect en $\vec{CB}$, alors

A est le milieu de [FD], c'est-à-dire FD = 2 FA.

Donc (*) devient : $\frac{FA}{2FA} = \frac{AM}{DC}$ s.q : $\frac{AM}{DC} = \frac{1}{2}$ s.q : $AM = \frac{1}{2} DC$ (**)

Car ABCD est un rectangle, alors DC = AB.

D'où (**) devient : $AM = \frac{1}{2} AB$.

Par suite M est le milieu de [AB].

Ainsi la droite (CF) coupe [AB] en son milieu.