Niveau : 3ère année collégiale
Prof : Ayoub OUDIKA

Devoir à domicile n°1
Correction

Exercice 1

1. Développer et simplifier les expressions suivantes :

$$A = 3x(2x+4) \qquad B = \left(\sqrt{5}-2\right)^2 \qquad C = \left(2\sqrt{2}-5\sqrt{7}\right)\left(2\sqrt{2}+5\sqrt{7}\right)$$

2. Factoriser les expressions suivantes :

$$D = x^2 - 10 \qquad E = 3x^2 - 2\sqrt{6}x + 2 \qquad F = (x-3)(5x-1) + (x-3)(x+5)$$

Correction

1. • Développons et simplifions l'expression A.

On a :

$$\begin{aligned} A &= 3x(2x+4) \\ &= 3x \times 2x + 3x \times 4 \\ &= 6x^2 + 12x \end{aligned}$$

D'où : $\boxed{A = 6x^2 + 12x}$

• Développons et simplifions l'expression B.

On a :

$$\begin{aligned} B &= \left(\sqrt{5}-2\right)^2 \\ &= \left(\sqrt{5}\right)^2 - 2 \times \sqrt{5} \times 2 + 2^2 \\ &= 5 - 4\sqrt{5} + 4 \\ &= 9 - 4\sqrt{5} \end{aligned}$$

D'où : $\boxed{B = 9 - 4\sqrt{5}}$

- Développons et simplifions l'expression C.

On a :

$$\begin{aligned} C &= \left(2\sqrt{2} - 5\sqrt{7}\right)\left(2\sqrt{2} + 5\sqrt{7}\right) \\ &= \left(2\sqrt{2}\right)^2 - \left(5\sqrt{7}\right)^2 \\ &= 4 \times 2 - 25 \times 7 \\ &= 8 - 175 \\ &= -167 \end{aligned}$$

D'où : $\boxed{C = -167}$

2. - Factorisons l'expression D.

On a :

$$\begin{aligned} D &= x^2 - 10 \\ &= x^2 - \left(\sqrt{10}\right)^2 \\ &= \left(x - \sqrt{10}\right)\left(x + \sqrt{10}\right) \end{aligned}$$

D'où : $\boxed{D = \left(x - \sqrt{10}\right)\left(x + \sqrt{10}\right)}$

- Factorisons l'expression E.

On a :

$$\begin{aligned} E &= 3x^2 - 2\sqrt{6}x + 2 \\ &= \left(\sqrt{3}x\right)^2 - 2 \times \sqrt{3} \times \sqrt{2} + \left(\sqrt{2}\right)^2 \\ &= \left(\sqrt{3}x - \sqrt{2}\right)^2 \end{aligned}$$

D'où : $\boxed{E = \left(\sqrt{3}x - \sqrt{2}\right)^2}$

- Factorisons l'expression F.

On a :

$$\begin{aligned} F &= (x-3)(5x-1)+(x-3)(x+5) \\ &= (x-3)\left[(5x-1)+(x+5)\right] \\ &= (x-3)(6x+4) \end{aligned}$$

D'où : $\boxed{F=(x-3)(6x+4)}$

Exercice 2

1. Soit a un nombre réel non nul.
   Simplifier l'expression : $A=\dfrac{a^4\times\left(-a^{-3}\right)^5}{\left(a^4\right)^{-2}}$
2. Donner l'écriture scientifique des nombres suivants :

$$B=13000000 \qquad C=0,00000817\times10^{-3} \qquad D=50\times10^7+0,2\times10^3$$

Correction

1. On a :

$$\begin{aligned} A &= \frac{a^4\times\left(-a^{-3}\right)^5}{\left(a^4\right)^{-2}} \\ &= \frac{a^4\times(-a)^{(-3)\times5}}{a^{4\times(-2)}} \\ &= \frac{a^4\times(-a)^{-15}}{a^{-8}} \\ &= \frac{-a^{4+(-15)}}{a^{-8}} \qquad \left(\text{car } (-a)^{-15}=-a^{-15}\right) \\ &= -\frac{a^{-11}}{a^{-8}} \\ &= -a^{-11-(-8)} \\ &= -a^{-3} \end{aligned}$$

   D'où : $\boxed{A=-a^{-3}}$

2. • L'écriture scientifique de B.
   On a : $B=13000000=1,3\times10^7$
   D'où l'écriture scientifique de B est : $\boxed{B=1,3\times10^7}$

- L'écriture scientifique de C.

  On a :

$$\begin{aligned} C &= 0,00000817 \times 10^{-3} \\ &= 8,17 \times 10^{-6} \times 10^{-3} \\ &= 8,17 \times 10^{-6+(-3)} \\ &= 8,17 \times 10^{-9} \end{aligned}$$

  D'où l'écriture scientifique de C est : $\boxed{C = 8,17 \times 10^{-9}}$

- L'écriture scientifique de D.

  On a :

$$\begin{aligned} D &= 50 \times 10^{7} + 0,2 \times 10^{3} \\ &= 5 \times 10 \times 10^{7} + 2 \times 10^{-1} \times 10^{3} \\ &= 5 \times 10^{8} + 2 \times 10^{2} \\ &= \left(5 \times 10^{6} + 2\right) \times 10^{2} \\ &= (5000000 + 2) \times 10^{2} \\ &= 5000002 \times 10^{2} \\ &= 5,000002 \times 10^{6} \times 10^{2} \\ &= 5,000002 \times 10^{8} \end{aligned}$$

  D'où l'écriture scientifique de D est : $\boxed{D = 5,000002 \times 10^{8}}$

Exercice 3

1. Calculer :

$$A = \sqrt{32} \times \sqrt{2} \qquad B = \sqrt{6 + \sqrt{9}} \qquad C = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{4}}}$$

2. Simplifier :

$$D = 2\sqrt{8} + 5\sqrt{32} - 4\sqrt{50} \qquad E = \sqrt{112} + 2\sqrt{63} - 5\sqrt{7}$$

3. Rendre rationnel les dénominateurs des nombres suivants :

$$F = \frac{3}{\sqrt{5}} \qquad G = \frac{-7}{3\sqrt{2}} \qquad H = \frac{5}{\sqrt{11} - \sqrt{7}}$$

Correction

1. • Calculons A.

On a :

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{32} \times \sqrt{2} \\ &= \sqrt{2 \times 16} \times \sqrt{2} \\ &= \sqrt{2} \times \sqrt{16} \times \sqrt{2} \\ &= \left(\sqrt{2}\right)^2 \times \sqrt{4^2} \\ &= 2 \times 4 \\ &= 8 \end{aligned}$$

D'où : $\boxed{A = 8}$

• Calculons B.

On a :

$$\begin{aligned} B &= \sqrt{6 + \sqrt{9}} \\ &= \sqrt{6 + \sqrt{3^2}} \\ &= \sqrt{6 + 3} \\ &= \sqrt{9} \\ &= \sqrt{3^2} \\ &= 3 \end{aligned}$$

D'où : $\boxed{B = 3}$

• Calculons C.

On a :

$$\begin{aligned} C &= \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{4}}} \\ &= \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2^2}}} \\ &= \sqrt{2+\sqrt{2+2}} \\ &= \sqrt{2+\sqrt{4}} \\ &= \sqrt{2+\sqrt{2^2}} \\ &= \sqrt{2+2} \\ &= \sqrt{4} \\ &= \sqrt{2^2} \\ &= 2 \end{aligned}$$

D'où : $\boxed{C = 2}$

2. • Simplifions D.

On a :

$$\begin{aligned} D &= 2\sqrt{8}+5\sqrt{32}-4\sqrt{50} \\ &= 2\sqrt{2\times 4}+5\sqrt{2\times 16}-4\sqrt{2\times 25} \\ &= 2\sqrt{2}\times\sqrt{4}+5\sqrt{2}\times\sqrt{16}-4\sqrt{2}\times\sqrt{25} \\ &= 2\sqrt{2}\times\sqrt{2^2}+5\sqrt{2}\times\sqrt{4^2}-4\sqrt{2}\times\sqrt{5^2} \\ &= 2\sqrt{2}\times 2+5\sqrt{2}\times 4-4\sqrt{2}\times 5 \\ &= 4\sqrt{2}+20\sqrt{2}-20\sqrt{2} \\ &= 4\sqrt{2} \end{aligned}$$

D'où : $\boxed{D = 4\sqrt{2}}$

• Simplifions E.

On a :

$$\begin{aligned} E &= \sqrt{112} + 2\sqrt{63} - 5\sqrt{7} \\ &= \sqrt{7 \times 16} + 2\sqrt{7 \times 9} - 5\sqrt{7} \\ &= \sqrt{7} \times \sqrt{16} + 2\sqrt{7} \times \sqrt{9} - 5\sqrt{7} \\ &= \sqrt{7} \times \sqrt{4^2} + 2\sqrt{7} \times \sqrt{3^2} - 5\sqrt{7} \\ &= \sqrt{7} \times 4 + 2\sqrt{7} \times 3 - 5\sqrt{7} \\ &= 4\sqrt{7} + 6\sqrt{7} - 5\sqrt{7} \\ &= 5\sqrt{7} \end{aligned}$$

D'où : $\boxed{E = 5\sqrt{7}}$

3. • Rendrons rationnel le dénominateur de F.

On a :

$$F = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3 \times \sqrt{5}}{\left(\sqrt{5}\right)^2} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

D'où : $\boxed{F = \frac{3\sqrt{5}}{5}}$

• Rendrons rationnel le dénominateur de G.

On a :

$$G = \frac{-7}{3\sqrt{2}} = \frac{(-7) \times \sqrt{2}}{3 \times \left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{-7\sqrt{2}}{3 \times 2} = \frac{-7\sqrt{2}}{6}$$

D'où : $\boxed{G = \frac{-7\sqrt{2}}{6}}$

• Rendrons rationnel le dénominateur de H.

On a :

$$\begin{aligned} H &= \frac{5}{\sqrt{11} - \sqrt{7}} \\ &= \frac{5\left(\sqrt{11} + \sqrt{7}\right)}{\left(\sqrt{11} - \sqrt{7}\right)\left(\sqrt{11} + \sqrt{7}\right)} \\ &= \frac{5\left(\sqrt{11} + \sqrt{7}\right)}{\left(\sqrt{11}\right)^2 - \left(\sqrt{7}\right)^2} \\ &= \frac{5\left(\sqrt{11} + \sqrt{7}\right)}{11 - 7} \\ &= \frac{5\left(\sqrt{11} + \sqrt{7}\right)}{4} \end{aligned}$$

D'où : $\boxed{H = \dfrac{5\left(\sqrt{11}+\sqrt{7}\right)}{4}}$

Exercice 4

1. Développer $\left(\sqrt{2}-3\right)^2$ puis en déduire la simplification de $\sqrt{11-6\sqrt{2}}$.
2. Montrer que : $\sqrt{7-\sqrt{13}}+\sqrt{7+\sqrt{13}}=\sqrt{26}$
3. Calculer : $S = \dfrac{1}{1+\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$

Correction

1. • Développons $\left(\sqrt{2}-3\right)^2$.

On a :

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{2}-3\right)^2 &= \left(\sqrt{2}\right)^2 - 2\times\sqrt{2}\times 3 + 3^2\\ &= 2 - 6\sqrt{2} + 9\\ &= 11 - 6\sqrt{2}\end{aligned}$$

D'où : $\boxed{\left(\sqrt{2}-3\right)^2 = 11-6\sqrt{2}}$

• Simplifions $\sqrt{11-6\sqrt{2}}$.

D'après la question précédent, on a : $11-6\sqrt{2} = \left(\sqrt{2}-3\right)^2$

Donc : $\sqrt{11-6\sqrt{2}} = \sqrt{\left(\sqrt{2}-3\right)^2} = \sqrt{2}-3$

D'où : $\boxed{\sqrt{11-6\sqrt{2}} = \sqrt{2}-3}$

2. On a :

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{7-\sqrt{13}}+\sqrt{7+\sqrt{13}}\right)^2 &= \left(\sqrt{7-\sqrt{13}}\right)^2 + 2\times\sqrt{7-\sqrt{13}}\times\sqrt{7+\sqrt{13}} + \left(\sqrt{7+\sqrt{13}}\right)^2\\ &= 7-\sqrt{13}+2\sqrt{\left(7-\sqrt{13}\right)\left(7+\sqrt{13}\right)}+7+\sqrt{13}\\ &= 14+2\sqrt{7^2-\left(\sqrt{13}\right)^2}\\ &= 14+2\sqrt{49-13}\\ &= 14+2\sqrt{36}\\ &= 14+2\sqrt{6^2}\\ &= 14+2\times 6\\ &= 14+12\\ &= 26\end{aligned}$$

D'où : $\boxed{\sqrt{7-\sqrt{13}}+\sqrt{7+\sqrt{13}}=\sqrt{26}}$

3. Remarquer que tout d'abord que :

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+\sqrt{2}} &= \frac{1-\sqrt{2}}{1^2-\left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{1-\sqrt{2}}{1-2} = \sqrt{2}-1\\ \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} &= \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\left(\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{3}-\sqrt{2}\\ \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} &= \frac{\sqrt{3}-\sqrt{4}}{\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{4}\right)^2} = \sqrt{4}-\sqrt{3}\\ &\vdots\\ \frac{1}{\sqrt{98}+\sqrt{99}} &= \frac{\sqrt{98}-\sqrt{99}}{\left(\sqrt{98}\right)^2-\left(\sqrt{99}\right)^2} = \sqrt{99}-\sqrt{98}\\ \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}} &= \frac{\sqrt{99}-\sqrt{100}}{\left(\sqrt{99}\right)^2-\left(\sqrt{100}\right)^2} = \sqrt{100}-\sqrt{99}\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{98}+\sqrt{99}} + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}} \\
&= \left(\sqrt{2}-1\right) + \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right) + \left(\sqrt{4}-\sqrt{3}\right) + \ldots + \left(\sqrt{99}-\sqrt{98}\right) + \left(\sqrt{100}-\sqrt{99}\right) \\
&= -1 + \sqrt{100} \\
&= -1 + 10 \\
&= 9
\end{aligned}$$

D'où : $\boxed{S = 9}$