Niveau : 2ème année Bac SM
Prof : Ayoub OUDIKA

Devoir surveillé n°1
Correction

★★★ ★★★ ★★★

Exercice 1

1. Montrer que : $(\forall x \in]0,+\infty[)\ \arctan(x)+\arctan\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\pi}{2}$
2. Calculer la limite suivante : $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\arctan\left(\frac{1+x^2}{x}\right)-\frac{\pi}{2}\right)$

Correction

1. Montrons que : $(\forall x \in]0,+\infty[)\ \arctan(x)+\arctan\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\pi}{2}$

   1ère méthode :

   Soit $x \in]0+\infty[$. En utilisant le bijection de la fonction tangent, il suffit de montrer que $\arctan(x)$ et $\frac{\pi}{2}-\arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ ont la même tangente dans l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.

   Il est claire que : $\begin{cases} 0<\arctan(x)<\frac{\pi}{2} \\ 0<\frac{\pi}{2}-\arctan\left(\frac{1}{x}\right)<\frac{\pi}{2} \end{cases}$

   On a : $\tan\left(\arctan(x)\right)=x$, et en utilisant la formule $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{1}{\tan(\theta)}$ pour tout $\theta \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, on obtient :

$$\begin{aligned} \tan\left(\frac{\pi}{2}-\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right) &= \frac{1}{\tan\left(\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right)} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{x}} \\ &= x \end{aligned}$$

On a montré donc que : $\tan\left(\arctan(x)\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right)$

D'où : $\boxed{(\forall x \in]0,+\infty[)\ \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}}$

2ème méthode :

Soit $x \in]0+\infty[$. On considère la fonction ϕ définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$\phi(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{\pi}{2}$$

La fonction ϕ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et on a :

$$\begin{aligned}\phi'(x) &= \frac{1}{1+x^2} + \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} \\ &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2+1}{x^2}} \\ &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} \\ &= 0\end{aligned}$$

Donc la fonction ϕ est constante sur $]0,+\infty[$, d'où : $\phi(x) = \phi(1) = 0$

C'est-à-dire : $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{\pi}{2} = 0$

Par suite : $\boxed{(\forall x \in]0,+\infty[)\ \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}}$

2. Calculons la limite : $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\arctan\left(\frac{1+x^2}{x}\right) - \frac{\pi}{2}\right)$

Soit $x \in]0,+\infty[$. D'après la question 1), on a :

$$\arctan\left(\frac{1+x^2}{x}\right) - \frac{\pi}{2} = -\arctan\left(\frac{x}{1+x^2}\right)$$

Donc :

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(\arctan\left(\frac{1+x^2}{x}\right)-\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{x\to+\infty} -x\arctan\left(\frac{x}{1+x^2}\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty} -\frac{\arctan\left(\frac{x}{1+x^2}\right)}{\frac{x}{1+x^2}}\times\frac{x^2}{1+x^2}$$

Et puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{1+x^2}$ et si on pose $t=\dfrac{x}{1+x^2}$, alors $t\to 0$ lorsque $x\to+\infty$, donc :

$$\lim_{x\to+\infty} -\frac{\arctan\left(\frac{x}{1+x^2}\right)}{\frac{x}{1+x^2}} = \lim_{t\to 0} -\frac{\arctan(t)}{t} = -1$$

D'où : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\arctan\left(\dfrac{1+x^2}{x}\right)-\dfrac{\pi}{2}\right)=-1}$

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=xE\left(\dfrac{4}{x^2+2}\right)$

1. Montrer que : $(\forall x\in]-1,1[)\ |f(x)-f(0)|\leqslant 2|x|$
2. En déduire que la fonction f est continue en 0.
3. Montrer que : $(\forall x\in]-1,1[)\ f(x)=x$

Correction

1. Montrons que : $(\forall x\in]-1,1[)\ |f(x)-f(0)|\leqslant 2|x|$

Soit $x \in]-1,1[$. D'une part, on a :

$$\begin{aligned} |f(x)-f(0)| &= |f(x)| && (\text{car } f(0)=0) \\ &= \left|xE\left(\frac{4}{x^2+2}\right)\right| \\ &= |x| \times \left|E\left(\frac{4}{x^2+2}\right)\right| \\ &= |x| \times E\left(\frac{4}{x^2+2}\right) && \left(\text{car } \frac{4}{x^2+2} > 0\right) \end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} x \in]-1,1[&\Rightarrow |x| \geqslant 0 \\ &\Rightarrow x^2 \geqslant 0 \\ &\Rightarrow x^2+2 \geqslant 2 \\ &\Rightarrow \frac{4}{x^2+2} \leqslant 2 \end{aligned}$$

Or la fonction $x \mapsto E(x)$ est croissante sur $\mathbb{R}$, donc : $E\left(\frac{4}{x^2+2}\right) \leqslant E(2) \leqslant 2$

D'où : $\boxed{(\forall x \in]-1,1[)\ |f(x)-f(0)| \leqslant 2|x|}$

2. Déduisons que la fonction f est continue en 0.

D'après la question 1), on a : $(\forall x \in]-1,1[)\ |f(x)-f(0)| \leqslant 2|x|$

Or $\lim\limits_{x\to 0} 2|x| = 0$, donc d'après le théorème d'encadrement : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$

Par suite la fonction f est continue en 0.

3. Montrons que : $(\forall x \in]-1,1[)\ f(x) = x$

Soit $x \in]-1,1[$.

- Si $x = 0$, on a $f(0) = 0$.

- Si $x \neq 0$, on a :

$$\begin{aligned} x \in]-1,1[\backslash\{0\} &\Rightarrow 0 < |x| < 1 \\ &\Rightarrow 0 < x^2 < 1 \\ &\Rightarrow 2 < x^2 + 2 < 3 \\ &\Rightarrow \frac{4}{3} < \frac{4}{x^2+2} < 2 \\ &\Rightarrow 1 < \frac{4}{x^2+2} < 2 \end{aligned}$$

Donc $E\left(\dfrac{4}{x^2+2}\right) = 1$ et par suite : $\quad f(x) = xE\left(\dfrac{4}{x^2+2}\right) = x \times 1 = x$

D'où : $\boxed{(\forall x \in]-1,1[)\ \ f(x) = x}$

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1-\cos(\sin(2x))}{x^2} & ;\ x > 0 \\ f(x) = \dfrac{x^2+2}{2x^2+1} & ;\ x \leqslant 0 \end{cases}$$

1. Étudier la continuité de la fonction f en 0.
2. (a) Montrer que : $\quad (\forall x \in]0,+\infty[)\ 0 \leqslant \dfrac{1-\cos(\sin(2x))}{x^2} \leqslant \dfrac{2}{x^2}$

   (b) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, puis calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.
3. Soit g la restriction de la fonction f sur l'intervalle $I =]-\infty, 0]$.

   (a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

   (b) Montrer que : $\quad (\forall x \in J)\ g^{-1}(x) = -\sqrt{\dfrac{2-x}{2x-1}}$

   (c) Montrer que l'équation $g(x) = \sqrt{2}$ admet une solution unique α dans l'intervalle dans l'intervalle I et que $-\dfrac{2}{3} < \alpha < -\dfrac{1}{2}$.

   (d) En déduire que : $\quad \dfrac{1}{2} < \sqrt{\dfrac{2-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-1}} < \dfrac{2}{3}$

Correction

1. Étudions la continuité de f en 0.

   D'une part, on a :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2+2}{2x^2+1}\\ &= 2\\ &= f(0)\end{aligned}$$

   Donc la fonction f est continue à gauche en 0.

   D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos\left(\sin(2x)\right)}{x^2}\\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos\left(\sin(2x)\right)}{\sin^2(2x)} \times \frac{\sin^2(2x)}{x^2}\\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos\left(\sin(2x)\right)}{\sin^2(2x)} \times \left(\frac{\sin(2x)}{2x}\right)^2 \times 4\end{aligned}$$

   Si on pose $t = \sin(2x)$, alors $t \to 0^+$ lorsque $x \to 0^+$, donc :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos\left(\sin(2x)\right)}{\sin^2(2x)} = \lim_{t\to 0^+} \frac{1-\cos(t)}{t^2} = \frac{1}{2}$$

   et on a : $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{\sin(2x)}{2x}\right)^2 = 1^2 = 1$, d'où :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{1}{2} \times 1 \times 4 = 2 = f(0)$$

   Donc la fonction f est continue à droite en 0.

   Par suite f est continue en 0.

2. (a) Montrons que : $(\forall x \in]0,+\infty[)\ 0 \leqslant \dfrac{1-\cos\left(\sin(2x)\right)}{x^2} \leqslant \dfrac{2}{x^2}$

   Soit $x \in]0,+\infty[$. On sait que : $-1 \leqslant \cos\left(\sin(2x)\right) \leqslant 1$

Donc : $0 \leqslant 1 - \cos(\sin(2x)) \leqslant 2$, c'est-à-dire : $0 \leqslant \dfrac{1-\cos(\sin(2x))}{x^2} \leqslant \dfrac{2}{x^2}$

D'où : $\boxed{(\forall x \in]0,+\infty[)\ 0 \leqslant \dfrac{1-\cos(\sin(2x))}{x^2} \leqslant \dfrac{2}{x^2}}$

(b) Déduisons $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

D'après la question 2.(a), on a : $(\forall x \in]0,+\infty[)\ 0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{2}{x^2}$

Et puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2}{x^2} = 0$, donc d'après le théorème d'encadrement :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) = 0$$

D'où : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0}$

3. (a) Montrons que g est admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

La fonction g est continue sur l'intervalle I et dérivable sur l'intervalle $I \setminus \{0\}$, et pour tout $x \in I \setminus \{0\}$, on a :

$$g'(x) = \frac{2x(2x^2+1) - 4x(x^2+2)}{(2x^2+1)^2} = -\frac{6x}{(2x^2+1)^2} > 0$$

Donc g est strictement croissante sur I, d'où, d'après le théorème de bijection, la fonction f admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur l'intervalle $J = g(I)$.

De plus, on a : $J = g(I) = g\left(]-\infty, 0]\right) = \left]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), g(0)\right] =]0, 2]$

(b) Montrons que : $(\forall x \in J)\ g^{-1}(x) = -\sqrt{\dfrac{2-x}{2x-1}}$

Soient $x \in J$ et $y \in I$. On a :

$$\begin{aligned}
x = g(y) &\Leftrightarrow x = \frac{y^2+2}{2y^2+1} \\
&\Leftrightarrow y^2 + 2 = x\left(2y^2+1\right) \\
&\Leftrightarrow (1-2x)y^2 - x + 2 = 0 \\
&\Leftrightarrow y^2 = \frac{x-2}{1-2x} \\
&\Leftrightarrow y = \sqrt{\frac{x-2}{1-2x}} \quad \text{ou} \quad y = -\sqrt{\frac{x-2}{1-2x}}
\end{aligned}$$

Et puisque $y \in I$, donc : $y = -\sqrt{\dfrac{x-2}{1-2x}} = -\sqrt{\dfrac{2-x}{2x-1}}$

D'où : $\boxed{(\forall x \in J)\ g^{-1}(x) = -\sqrt{\dfrac{2-x}{2x-1}}}$

(c) Montrons que l'équation $g(x) = \sqrt{2}$ admet une solution unique α dans l'intervalle dans l'intervalle I et que $-\dfrac{2}{3} < \alpha < -\dfrac{1}{2}$.

La fonction g est une bijection de I vers J, et puisque $\sqrt{2} \in J$, alors il existe un unique $\alpha \in I$ tel que $g(\alpha) = \sqrt{2}$.

De plus, on a $g\left(-\dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{22}{17}$ et $g\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{3}{2}$ et $\dfrac{22}{19} < \sqrt{2}$ et $\dfrac{3}{2} > \sqrt{2}$, donc :

$$\left(g\left(-\frac{2}{3}\right) - \sqrt{2}\right) \times \left(g\left(\frac{1}{2}\right) - \sqrt{2}\right) < 0$$

D'où, par la méthode de Dichotomie $-\dfrac{2}{3} < \alpha < -\dfrac{1}{2}$.

(d) Déduisons que : $\dfrac{1}{2} < \sqrt{\dfrac{2-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-1}} < \dfrac{2}{3}$

D'après la question 3.(c), on a : $-\dfrac{2}{3} < \alpha < -\dfrac{1}{2}$, et on a :

$$g(\alpha) = \sqrt{2} \Leftrightarrow \alpha = g^{-1}\left(\sqrt{2}\right)$$

Donc :

$$\begin{aligned} -\frac{2}{3} < \alpha < -\frac{1}{2} &\Leftrightarrow -\frac{2}{3} < g^{-1}\left(\sqrt{2}\right) < -\frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow -\frac{2}{3} < -\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-1}} < -\frac{1}{2} \\ &\frac{1}{2} < \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-1}} < \frac{2}{3} \end{aligned}$$

D'où : $\boxed{\dfrac{1}{2} < \sqrt{\dfrac{2-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-1}} < \dfrac{2}{3}}$

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \arctan\left(\sqrt{1+x^2} - x\right)$

1. Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R})\ 0 < f(x) < \dfrac{\pi}{2}$
2. (a) Établir que : $(\forall x \in \mathbb{R})\ 1 - \tan^2(f(x)) = 2x\tan(f(x))$

   (b) En déduire que : $(\forall x \in \mathbb{R})\ \tan\left(\dfrac{\pi}{2} - 2f(x)\right) = x$

   (c) En déduire que : $(\forall x \in \mathbb{R})\ f(x) = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2}\arctan(x)$
3. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution ω dans l'intervalle $]0, 1[$.
4. Montrer que : $\arctan\left(\dfrac{1}{\omega}\right) = 2\omega$

   (**Indication** : vous pouvez utiliser la première question de l'exercice 1)

Correction

1. Montrons que : $(\forall x \in \mathbb{R})\ 0 < f(x) < \dfrac{\pi}{2}$

   Soit $x \in]0, +\infty[$. On sait que pour tout $t \in]0, +\infty[$, $0 < \arctan(t) < \dfrac{\pi}{2}$, donc il suffit de montrer que $\sqrt{1+x^2} - x > 0$.

   On a $1+x^2 > x^2$, et puisque x est positif, donc $\sqrt{1+x^2} > x$, c'est-à-dire $\sqrt{1+x^2} - x > 0$.

   Donc : $0 < \arctan\left(\sqrt{1+x^2} - x\right) < \dfrac{\pi}{2}$

   Par suite : $\boxed{(\forall x \in \mathbb{R})\ 0 < f(x) < \dfrac{\pi}{2}}$
2. (a) Établirons que : $(\forall x \in \mathbb{R})\ 1 - \tan^2(f(x)) = 2x\tan(f(x))$

   Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la question 1), on a : $0 < f(x) < \dfrac{\pi}{2}$

   Donc $\tan(f(x))$ existe et on a :

$$\begin{aligned}\tan^2(f(x)) &= \left(\tan\left(\arctan\left(\sqrt{1+x^2} - x\right)\right)\right)^2 \\ &= \left(\sqrt{1+x^2} - x\right)^2 \\ &= 1 + 2x^2 - 2x\sqrt{1+x^2}\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}1-\tan^2\left(f(x)\right) &= 2x\sqrt{1+x^2}-2x^2\\ &= 2x\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)\\ &= 2x\tan\left(\arctan\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)\right)\\ &= 2x\tan\left(f(x)\right)\end{aligned}$$

Par suite : $\boxed{(\forall x\in\mathbb{R})\ 1-\tan^2\left(f(x)\right)=2x\tan\left(f(x)\right)}$

(b) Déduisons que : $(\forall x\in\mathbb{R})\ \tan\left(\frac{\pi}{2}-2f(x)\right)=x$

D'une part, d'après la question 2.(a), on a : $1-\tan^2\left(f(x)\right)=2x\tan\left(f(x)\right)$

En utilisant l'égalité $1-\tan^2(\theta)=\dfrac{2\tan(\theta)}{\tan(2\theta)}$ pour tout $\theta\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, on obtient :

$$1-\tan^2\left(f(x)\right)=\frac{2\tan\left(f(x)\right)}{\tan\left(2f(x)\right)}=2x\tan\left(f(x)\right)$$

Ce qui entraine : $\dfrac{1}{\tan\left(2f(x)\right)}=\dfrac{2x\tan\left(f(x)\right)}{2\tan\left(f(x)\right)}=x$

D'autre part, on a : $\tan\left(\frac{\pi}{2}-2f(x)\right)=\dfrac{1}{\tan\left(2f(x)\right)}$

Or $\dfrac{1}{\tan\left(2f(x)\right)}=x$ (d'après ce qui précède), donc : $\tan\left(\frac{\pi}{2}-2f(x)\right)=x$

D'où : $\boxed{(\forall x\in\mathbb{R})\ \tan\left(\frac{\pi}{2}-2f(x)\right)=x}$

(c) Déduisons que : $(\forall x\in\mathbb{R})\ f(x)=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\arctan(x)$

Soit $x\in\mathbb{R}$. D'après la question 2.(b), on a : $\tan\left(\frac{\pi}{2}-2f(x)\right)=x$

Donc : $\arctan\left(\tan\left(\frac{\pi}{2}-2f(x)\right)\right)=\arctan(x)$

C'est-à-dire : $\frac{\pi}{2}-2f(x)=\arctan(x)$

D'où : $f(x)=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\arctan(x)$

Par suite : $\boxed{(\forall x\in\mathbb{R})\ f(x)=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\arctan(x)}$

3. Montrons que l'équation $f(x)=x$ admet au moins une solution dans l'intervalle $]0,1[$.

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=f(x)-x$

La fonction g est continue sur $[0,1]$ et on a $g(0)=\frac{\pi}{4}$ et $g(1)=\arctan\left(\sqrt{2}-1\right)-1$

Comme $g(0) > 0$ et $g(1) \backsimeq -0,06 < 0$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins un élément $x \in]0,1[$ tel que $g(x) = 0$.

En d'autres termes, l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution dans l'intervalle $]0,1[$.

4. Montrons que : $\arctan\left(\frac{1}{\omega}\right) = 2\omega$

D'après la question 3), on a $f(\omega) = \omega$ et d'après la question 2.(c), on a :

$$f(\omega) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\arctan(\omega)$$

Donc :

$$\begin{aligned} f(\omega) = \omega &\Leftrightarrow \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\arctan(\omega) = \omega \\ &\Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - \arctan(\omega) = 2\omega \end{aligned}$$

Et d'après la question 1) de l'exercice 1, on a : $\frac{\pi}{2} - \arctan(\omega) = \arctan\left(\frac{1}{\omega}\right)$

D'où : $\boxed{\arctan\left(\frac{1}{\omega}\right) = 2\omega}$