Système de deux équations du premier degré à deux inconnues

I- Système de deux équations à deux inconnues:

Définition:

Soient a, b, c, a', b' et c' des nombres réels.

Le système $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ appelée un système de deux équations du premier degré à deux inconnues x et y.

Exemple: $\begin{cases} 4x-3y=1 \\ x+2y=-5 \end{cases}$ est un système de deux équations du premier degré à deux inconnues x et y.

Remarque: Résoudre un système, c'est trouver tous les couples $(x;y)$ pour lesquels, les deux équations sont vérifiés simultanément.

Exemple: On considère le système suivant: $(S): \begin{cases} 3x-y=4 \\ x+2y=13 \end{cases}$

* Le couple $(3;5)$ est une solution du système (S) car:
  - $\rightarrow 3\times 3-5=9-5=4$
  - $\rightarrow 3+2\times 5=3+10=13$
* Le couple $(1;6)$ n'est pas une solution du système (S) car:
  $3\times 1-6=3-6=-3\neq 4$

Remarque: Dans un couple $(x;y)$, l'ordre des termes est important. Par exemple le couple $(3;5)$ est une solution de l'équation $3x-y=4$, mais $(5;3)$ ne l'est pas.

Application: On considère le système: $(S): \begin{cases} x-3y=-9 \\ 2x+y=-4 \end{cases}$

Parmi les couples suivantes, déterminer lequel est une solution du système (S): $(-3;2)$, $(3;4)$ et $(2;-5)$

II- Méthodes de résolution algébriques:

1) Méthode de substitution:

Exemple: Résolvons le système: $\begin{cases} 3x-y=4 & (1) \\ x+2y=13 & (2) \end{cases}$

Calculons x en fonction de y dans l'équation (2), on obtient:

$$x=13-2y \quad (3)$$

Substituons (remplaçons) x par $13-2y$ dans l'équation (1), on obtient: $3(13-2y)-y=4$

S.q: $39-6y-y=4$

S.q: $-7y=4-39$

S.q: $-7y=-35$

S.q: $y=\frac{-35}{-7}=5$

Substituons dans l'équation (3) par 5, on obtient: $x=13-2\times5=3$.

D'où la solution de ce système est le couple $(3;5)$

Application: Résoudre en utilisant la méthode de substitution le système: $\begin{cases} x-2y=-1 \\ 3x-4y=5 \end{cases}$

2) Méthode de combinaison linéaire:

Exemple: Résolvons le système: $\begin{cases} -2x+3y=-4 & (1) \\ 5x+2y=-1 & (2) \end{cases}$

* Pour éliminer y, on multiple les membres de l'équation (1) par -2 et les membres de l'équation (2) par 3:

$$\begin{cases} -2(-2x+3y)=-2\times(-4) \\ 3(5x+2y)=3\times(-1) \end{cases} \quad \text{S.q:} \quad \begin{cases} 4x-6y=8 \\ 15x+6y=-3 \end{cases}$$

Additionnons membre à membre les membres des deux équations:

$$4x-\cancel{6y}+15x+\cancel{6y}=8+(-3)$$

Donc $19x=5$, soit $x=\frac{5}{19}$.

* Pour éliminer x, on multiple les membres de l'équation (1) par 5 et les membres de l'équation (2) par 2:

$\begin{cases} 5(-2x+3y)=5\times(-4) \\ 2(5x+2y)=2\times(-1) \end{cases}$ S.E: $\begin{cases} -10x+15y=-20 \\ 10x+4y=-2 \end{cases}$

Additionnons membre à membre les membres des deux équation:

$-10x+15y+10x+4y=-20+(-2)$

Donc: $19y=-22$, soit: $y=\frac{-22}{19}$

D'où la solution de ce système est le couple $\left(\frac{5}{19};-\frac{22}{19}\right)$.

Application: Résoudre en utilisant la méthode de combinaison linéaire le système: $\begin{cases} -2x+y=-3 \\ 3x-2y=4 \end{cases}$

III- Méthode de résolution graphique:

Exemple: Résolvons le système: $\begin{cases} x-3y=-9 \\ 2x+y=-4 \end{cases}$

En exprimant y en fonction de x dans chacune des équations:

$\begin{cases} y=\frac{1}{3}x+3 \\ y=-2x-4 \end{cases}$

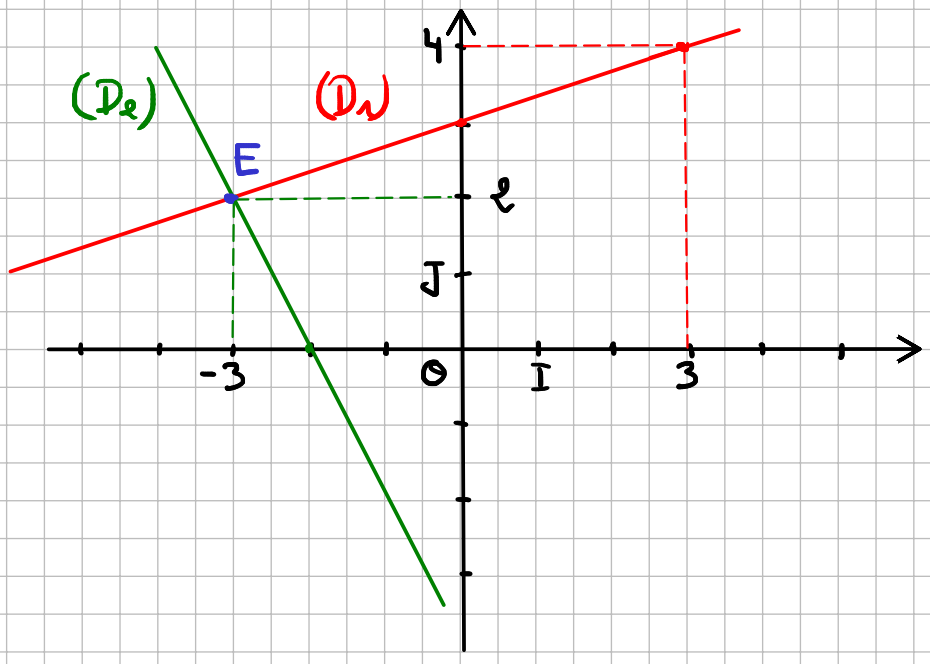
On considère les droites $(D_1): y=\frac{1}{3}x-3$ et $(D_2): y=-2x-4$

(D_1)

x	0	3
y	3	4

(D_2)

x	-2	-3
y	0	2



Les droites (D_1) et (D_2) sont sécantes en $E(-3;2)$.

D'où $(-3;2)$ est la solution de ce système.

Application: Résoudre graphiquement le système: $\begin{cases} x-y=5 \\ x+y=11 \end{cases}$