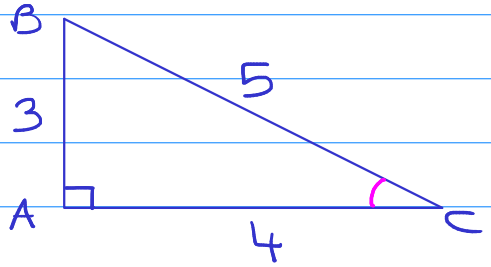
Trigonométrie (solution)

Exercice n°1 :

1) On a : $* AB^2 = 3^2 = 9$
$* AC^2 = 4^2 = 16$
$* BC^2 = 5^2 = 25$

On remarque que $BC^2 = AB^2 + AC^2$, donc d'après la réciproque du théorème de pythagore, ABC est un triangle rectangle en A.

2) Les rapports trigonométriques de $\widehat{ACB}$.



$* \cos \widehat{ACB} = \frac{AC}{BC} = \frac{4}{5}$ $* \sin \widehat{ACB} = \frac{AB}{BC} = \frac{3}{5}$

$* \tan \widehat{ACB} = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{4}$

Exercice n°2 :

* calculons BC.

On a $\sin \widehat{ABC} = \frac{AC}{BC}$, donc $BC = \frac{AC}{\sin \widehat{ABC}}$

et puisque $AC = 4$ et $\sin \widehat{ABC} = 0,625$ on en déduit que

$$BC = \frac{4}{0,625} = 6,4$$

D'où : $\boxed{BC = 6,4}$

* calculons AB.

on a ABC est un triangle rectangle en A, donc d'après le théorème de pythagore : $BC^2 = AB^2 + AC^2$

c.à.d. $AB^2 = BC^2 - AC^2$

On a $AC = 4$ et $BC = 6,4$ (d'après la question précédente)

Donc : $AB^2 = 6,4^2 - 4^2 = 40,96 - 16 = 24,96$

et comme $AB > 0$, donc $\boxed{AB = \sqrt{24,96}}$

Exercice n° 3 :

* calculons AB.

On a $\tan \widehat{ABC} = \frac{AC}{AB}$, donc $AB = \frac{AC}{\tan \widehat{ABC}}$

et puisque $AC = 3$ et $\tan \widehat{ABC} = 0,75$, donc

$AB = \frac{3}{0,75} = 4$, d'où $\boxed{AB = 4}$

* calculons BC.

On a ABC est un triangle rectangle en A, donc d'après le théorème de pythagore : $BC^2 = AB^2 + AC^2$

$= 4^2 + 3^2$

$= 16 + 9$

$= 25$

On $BC > 0$, on en déduit que $\boxed{BC = \sqrt{25} = 5}$

Exercice n° 4 :

1) * calculons $\sin x$.

On sait que : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

c.à.d. : $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

$= 1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$ (car $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$)

$= 1 - \frac{2}{4}$

$= \frac{1}{2}$

On $\sin x > 0$, donc $\sin x = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

D'où : $\boxed{\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}}$

* Calculons $\tan x$.

On a $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$.

D'où : $\boxed{\tan x = 1}$

2) * Calculons $\cos x$.

On a : $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ et $\tan x = \sqrt{15}$

Donc : $\sqrt{15} = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ s.q : $\cos x = \dfrac{1}{\sqrt{15}} \sin x$

s.q : $\cos^2 x = \dfrac{1}{15} \sin^2 x$ et comme $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

c.à.d $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, donc :

$$\cos^2 x = \frac{1}{15}(1 - \cos^2 x) = \frac{1}{15} - \frac{1}{15}\cos^2 x$$

s.q : $\cos^2 x + \dfrac{1}{15}\cos^2 x = \dfrac{1}{15}$

s.q : $\left(1 + \dfrac{1}{15}\right)\cos^2 x = \dfrac{1}{15}$

s.q : $\dfrac{16}{15}\cos^2 x = \dfrac{1}{15}$

s.q : $16 \cos^2 x = 1$

s.q : $\cos^2 x = \dfrac{1}{16}$

On : $\cos x > 0$, d'où $\cos x = \sqrt{\dfrac{1}{16}} = \dfrac{1}{4}$.

Par suite : $\boxed{\cos x = \dfrac{1}{4}}$

* Calculons $\sin x$.

on a : $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ s.q : $\sin x = \tan x \times \cos x$

$= \sqrt{15} \times \dfrac{1}{4}$

$= \dfrac{\sqrt{15}}{4}$

D'où : $\boxed{\sin x = \frac{\sqrt{15}}{4}}$

Exercice n°5 :

* Simplifions A.

On a :

$$A = (\sin\alpha + \cos\alpha)^2 + (\sin\alpha - \cos\alpha)^2$$
$$= \sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha + \sin^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha$$
$$= \sin^2\alpha + \sin^2\alpha + \cos^2\alpha + \cos^2\alpha$$
$$= 2\sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha$$
$$= 2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)$$
$$= 2 \times 1 \qquad (\text{car } \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1)$$
$$= 2$$

D'où : $\boxed{A = 2}$

* Simplifions B.

On a :

$$B = \cos^2\alpha + 2\sin^2\alpha - 1$$
$$= \cos^2\alpha + \sin^2\alpha + \sin^2\alpha - 1$$
$$= 1 + \sin^2\alpha - 1 \qquad (\text{car } \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1)$$
$$= \sin^2\alpha$$

D'où : $\boxed{B = \sin^2\alpha}$

* Simplifions C.

On a :

$$C = \cos^4\alpha + 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha + \sin^4\alpha$$
$$= (\cos^2\alpha)^2 + 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha + (\sin^2\alpha)^2$$
$$= (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)^2$$
$$= 1^2$$
$$= 1$$

D'où : $\boxed{C = 1}$

* simplifions D.

On a:

$$D = \frac{1}{1+\sin\alpha} + \frac{1}{1-\sin\alpha} + \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$= \frac{1-\sin\alpha + 1+\sin\alpha}{(1+\sin\alpha)(1-\sin\alpha)} + \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$= \frac{2}{1-\sin^2\alpha} + \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$= \frac{2}{\cos^2\alpha} + \frac{1}{\cos^2\alpha} \qquad (\text{car } 1-\sin^2\alpha = \cos^2\alpha)$$

$$= \frac{3}{\cos^2\alpha}$$

D'où : $\boxed{D = \frac{3}{\cos^2\alpha}}$

* simplifions E :

On a:

$$E = \sqrt{\cos\alpha+1} \times \sqrt{\cos\alpha-1} \times \frac{1}{\sin\alpha}$$

$$= \sqrt{(\cos\alpha+1)(\cos\alpha-1)} \times \frac{1}{\sin\alpha}$$

$$= \sqrt{\cos^2\alpha - 1} \times \frac{1}{\sin\alpha}$$

$$= \sqrt{\sin^2\alpha} \times \frac{1}{\sin\alpha} \qquad (\text{car } \cos^2\alpha - 1 = \sin^2\alpha)$$

$$= \sin\alpha \times \frac{1}{\sin\alpha}$$

$$= 1$$

D'où : $\boxed{E = 1}$

* Simplifions F.

On a :

$$F = \frac{\cos^4\alpha - \sin^4\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$$

$$= \frac{(\cos^2\alpha)^2 - (\sin^2\alpha)^2}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$$

$$= \frac{(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$$

$$= \cos^2\alpha + \sin^2\alpha$$

$$= 1$$

D'où : $\boxed{F = 1}$

Exercice n° 6 :

1) Montrons que : $\cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x}$

On a : $\frac{1}{1+\tan^2 x} = \frac{1}{1+\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2}$

$$= \frac{1}{1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}$$

$$= \frac{1}{\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}} \qquad (\text{car } \cos^2 x + \sin^2 x = 1)$$

$$= \cos^2 x$$

D'où : $\boxed{\cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x}}$

2) Montrons que : $\sin^2 x = \dfrac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$

On a : $\dfrac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x} = \dfrac{\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2}{1+\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2}$

$$= \frac{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{1+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}$$

$$= \frac{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}}$$

$$= \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x+\sin^2 x}$$

$$= \frac{\sin^2 x}{1} \qquad (\text{car } \cos^2 x+\sin^2 x = 1)$$

$$= \sin^2 x$$

D'où : $\boxed{\sin^2 x = \dfrac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}}$

3) Sachant que $\tan x = 4\sqrt{3}$, calculons $\cos x$ et $\sin x$.

D'après 1) et 2), on a :

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x} \quad \text{et} \quad \sin^2 x = \frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$$

or $\tan x = 4\sqrt{3}$, donc on a :

$$* \cos^2 x = \frac{1}{1+(4\sqrt{3})^2} = \frac{1}{1+16\times 3} = \frac{1}{1+48} = \frac{1}{49}$$

$$* \sin^2 x = \frac{(4\sqrt{3})^2}{1+(4\sqrt{3})^2} = \frac{16\times 3}{1+16\times 3} = \frac{48}{1+48} = \frac{48}{49}$$

puisque $\cos x > 0$ et $\sin x > 0$, donc :

* $\cos x = \sqrt{\frac{1}{49}} = \frac{1}{7}$

* $\sin x = \sqrt{\frac{48}{49}} = \frac{4\sqrt{3}}{7}$

D'où : $\boxed{\sin x = \frac{1}{7}}$ et $\boxed{\cos x = \frac{4\sqrt{3}}{7}}$

Exercice n°7 :

* Simplifions A.

On a : $A = \cos 25° + \cos 70° - \sin 65° + \sin 20°$

or : $25° + 65° = 90°$ et $70° + 20° = 90°$, on a :

$\cos 25° = \sin 65°$ et $\cos 70° = \sin 20°$ ce qui nous donne :

$A = \sin 65° + \sin 20° - \sin 65° + \sin 20°$

$= 2 \sin 20°$

D'où : $\boxed{A = 2 \sin 20°}$

* Simplifions B.

On a :

$B = \sin 80° + 7\sin^2 50° - \cos 10° + 7\sin^2 40°$

or : $80° + 10° = 90°$ et $50° + 40° = 90°$, on a :

$\sin 80° = \cos 10°$ et $\sin 50° = \cos 40°$

Donc :

$B = \cos 10° + 7\cos^2 40° - \cos 10° + 7\sin^2 40°$

$= 7(\cos^2 40° + \sin^2 40°)$

$= 7 \times 1$ (car $\cos^2 40° + \sin^2 40° = 1$)

$= 7$

D'où : $\boxed{B = 7}$

Exercice n° 8 (challenge) : Soit x la mesure d'un angle aigu tel que : $2\cos x + 3\sin x = 3$ (*)

Calculons $\cos x$ et $\sin x$.

On sait que : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

C.à.d : $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

C.à.d : $\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$ (car $\cos x > 0$)

Remplaçons $\cos x$ par $\sqrt{1-\sin^2 x}$ dans (*) on obtient :

$$2\sqrt{1-\sin^2 x} + 3\sin x = 3$$

S.q : $2\sqrt{1-\sin^2 x} = 3 - 3\sin x$

S.q : $\left(2\sqrt{1-\sin^2 x}\right)^2 = (3-3\sin x)^2$

S.q : $4(1-\sin^2 x) = 9 - 18\sin x + 9\sin^2 x$

S.q : $13\sin^2 x - 18\sin x + 5 = 0$

S.q : $13\sin^2 x - 13\sin x - 5\sin x + 5 = 0$

S.q : $13\sin x(\sin x - 1) - 5(\sin x - 1) = 0$

S.q : $(\sin x - 1)(13\sin x - 5) = 0$

S.q : $\sin x - 1 = 0$ ou $13\sin x - 5 = 0$

S.q : $\sin x = 1$ ou $\sin x = \frac{5}{13}$

et comme $\sin x < 1$, donc $\boxed{\sin x = \frac{5}{13}}$

Calculons maintenant $\cos x$.

On sait que $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$ et $\sin x = \frac{5}{13}$

Donc : $\cos x = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2}$

$= \sqrt{1 - \frac{25}{169}}$

$= \sqrt{\frac{144}{169}}$

$= \frac{12}{13}$

Par suite : $\boxed{\cos x = \frac{12}{13}}$