Vecteurs et translation

I - Vecteurs :

1) Vocabulaire :

Définition

Un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est caractérisé par trois composantes :

* La direction : la direction de la droite (AB) ;
* Le sens : de A vers B ;
* La longueur : la distance AB.



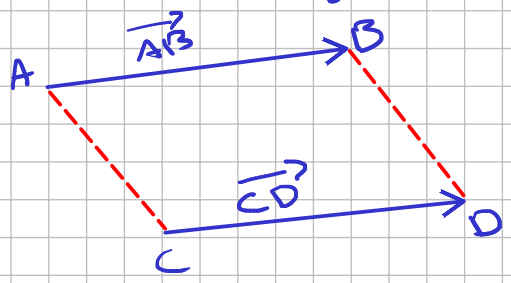
Remarque : Tout point A définit un vecteur nul noté $\vec{0}$, on écrit : $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$

2) Égalité de deux vecteurs :

Propriété

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ signifie que :

* $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont la même direction : (AB) // (CD)
* $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont le même sens
* $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont la même longueur : AB = CD



Autrement dit : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ signifie que ABDC est un parallélogramme.

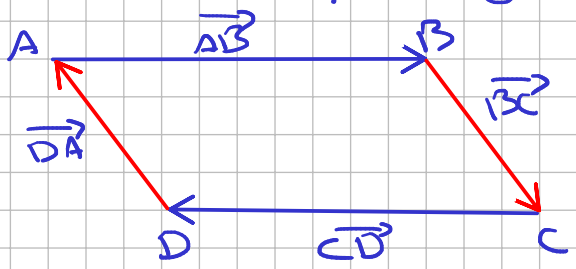
3) Vecteur opposé :

Définition

Le vecteur opposé d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur $\overrightarrow{BA}$, on écrit : $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$

Remarque : Deux vecteurs opposés ont la même direction et la même longueur, mais ils ont des sens opposés.

Exemple: Soit ABCD un parallélogramme.



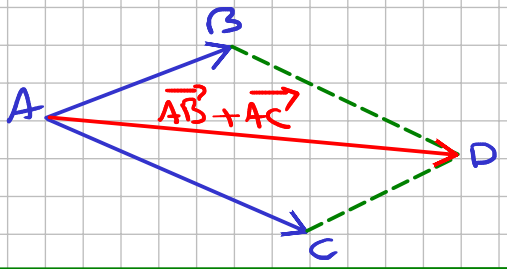
On a: $\vec{CD}$ est l'opposé de $\vec{AB}$, donc $\vec{AB} = -\vec{CD}$

$\vec{DA}$ est l'opposé de $\vec{BC}$, donc $\vec{BC} = -\vec{DA}$

4) somme de deux vecteurs:

Propriété

La somme de deux vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ est le vecteur $\vec{AD}$ tel que ABDC est un parallélogramme. On écrit: $\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AD}$



Application: Soit ABCD un parallélogramme.

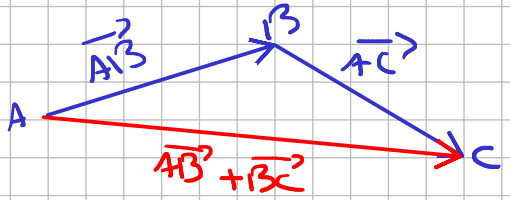
construire les vecteurs $\vec{AB}+\vec{AD}$ et $\vec{AC}+\vec{AD}$.

5) Relation de chasles:

Propriété

Soient A, B et C trois points.

On a $\vec{AB}+\vec{BC}=\vec{AC}$ c'est appelée la relation de chasles



Application: Soient A, B, C et D quatre points.

simplifier: $\vec{DA} - \vec{DB}$

$\vec{AB} - \vec{AC} + \vec{DC} - \vec{DB}$

$\vec{AB} - \vec{CD} - \vec{AC} + \vec{BA}$

6) Produit d'un vecteur par un nombre réel :

Définition

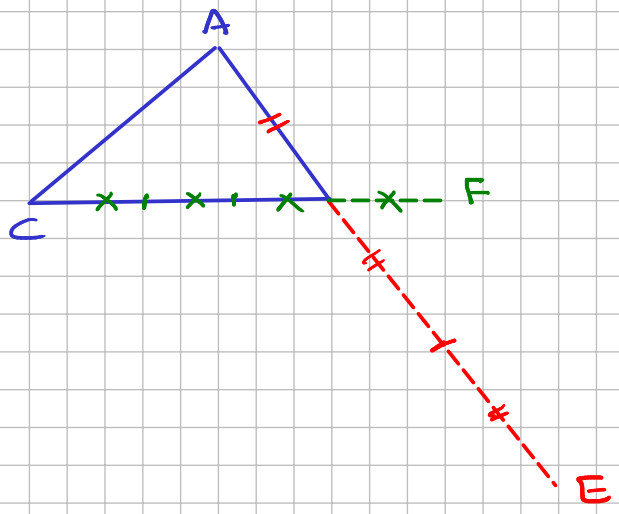
Soient k un nombre réel et $\overrightarrow{AB}$ un vecteur non nul.

Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est le produit du vecteur $\overrightarrow{AB}$ par le nombre k si $C \in (AB)$ tel que :

* si $k > 0$, $AC = k\,AB$ et $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$ ont le même sens.
* si $k < 0$, $AC = -k\,AB$ et $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$ ont des sens contraires.
* si $k = 0$, $C = A$.

Exemple : Soit ABC un triangle.

Construisons les points E et F tels que $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BF} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$



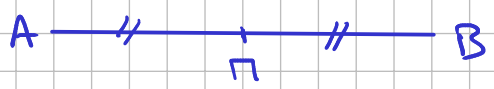
7) Alignement des points :

Propriété

Soient A, B et C trois points et k un nombre réel.

Si $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$, alors les points A, B et C sont alignés.

Exemple : Soient $[AB]$ un segment et Π le milieu de $[AB]$.



On a $\overrightarrow{A\Pi} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, donc les points A, Π et B sont alignés.

On a aussi : $\overrightarrow{A\Pi} = \overrightarrow{\Pi B} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{\Pi A} + \overrightarrow{\Pi B} = \vec{0}$

Application: ABCD est un parallélogramme.

Soient E et F deux points tels que $\overrightarrow{CE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AE}$.

1) Construire la figure.

2) Montrer que $\overrightarrow{CF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$

3) Montrer que $\overrightarrow{CF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BF}$.

4) En déduire que les points B, C et F sont alignés.

II- Translation:

1) Image d'un point par une translation:

Définition

Soient A et B deux points distincts.

M' est l'image de M par la translation qui transforme A en B signifie que ABM'M est un parallélogramme.

Autrement dit: M' est l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ signifie que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$.

→ 1er cas: Si $M \in (AB)$:



→ 2ème cas: Si $M \notin (AB)$:



2) Propriétés des translations:

Propriété

1) L'image d'un segment [AB] par une translation est un segment [A'B'] de même longueur.

La translation conserve les longueurs.

2) L'image d'une droite (AB) par une translation est une droite (A'B') parallèle à (AB).

3) Les images des points alignés A, B et C par une translation sont des points alignés.

La translation conserve l'alignement des points.

4) L'image d'un angle $\widehat{ABC}$ par une translation est un angle de même mesure.

La translation conserve les mesures des angles.

5) L'image d'un cercle (C) par une translation est un cercle de même rayon.

Application: ABCD est un parallélogramme de centre O.

1) Construire les points M et P tels que $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{BC}$.

2) On considère la translation t qui transforme O en C.

(a) Déterminer l'image de B par la translation t.

(b) Montrer que P est l'image de D par la translation t.

3) Montrer que les points P, C et M sont alignés.